PA7.1AH5P

a) $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

b) $\binom{8}{7} = \frac{8!}{7!(8-7)!} = 8$

c) $\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$

d) $\binom{n}{n-1} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!(n-n+1)!} = n$

PB7.2

Perinteisessä korttipakassa on 52 korttia. 52 korttia on jaettu neljään maahan: hertta, pata, risti ja ruutu. Kunkin maan kortit ovat numeroitu 1 - 13. Pelaaja valitsee pakasta umpimähkään 4 korttia.

a) Kuinka monella eri tavalla pakasta voidaan valita neljä korttia?

b) Kuinka monella eri tavalla pakasta voi valita neljä korttia, ettei yhdessäkään kortissa ole numeroa 6?

c) Kuinka monta neljän patakortin yhdistelmää voidaan valita?

d) Kuinka monta neljän kortin yhdistelmää voidaan valita, että valinnassa kortit ovat samaa maata?

a) Pakasta voi ottaa neljä korttia $\binom{52}{4} = 270725$ eri tavalla.

b) Pakasta voi ottaa neljä korttia, että ei satu numeroa kaksi $\binom{48}{4} = 194580$ eri tavalla.

c) Neljän ruudun valinta on 13 ruutukortin 4 -kombinaatio: $\binom{13}{4}$ = 715 eri tavalla.

d) Yksi maa neljästä voidaan valita 4 eri tavalla, joten nyt: $\binom{13}{4} \cdot 4$ = 2860 eri tavalla

PA7.3

Ratkaise $\binom{n}{n-2} = 3$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot (n-n+2)} =$

$n^2 - n = 12$, josta

$n_1 = -3$ ja $n_2 = 4$, näistä n_1 hylätään koska n:n pitää olla postiivinen kokonaisluku.

Vastaus: $n = 4$

PB7.4

Tarkastellaan sanoja MUUMIMAMMA ja NIISKUNEITI. Kummasta sanasta saadaan enemmän muodostettua erilaista yhtäpitkiä sanoja?

Sanassa MUUMIMAMMA on yhteensä 10 kirjainta, eli 10 kirjaimella voidaan muodostaa periaatteessa 10! erilaista sanaa. Sanassa on kirjaimia seuraavasti N(M)=5, N(U)=2, N(I)=1, N(A)=2.

M-kirjaimen paikka voidaan valita $\binom{10}{5} = 252$ eri tavalla.

Sen jälkeen U-kirjaimen paikka voidaan valita $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla.

Sen jälkeen I-kirjaimen paikka voidaan valita $\binom{3}{2} = 3$ eri tavalla.

Sen jälkeen A-kirjainten paikka voidaan valita yhdellä eri tavalla.
Nyt $n = 252 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1 = 7560$

Sanassa NIISKUNEITI on yhteensä 11 kirjainta, eli 11 kirjaimella voidaan muodostaa periaatteessa 11! erilaista sanaa. Sanassa on kirjaimia seuraavasti N(N)=2, N(I)=4, N(S)=1, N(K)=1, N(U)=1, N(E)=1 ja N(T)=1.

N-kirjaimen paikka voidaan valita $\binom{11}{2} = 55$ eri tavalla.

Sen jälkeen I-kirjaimen paikka voidaan valita $\binom{9}{4} = 126$ eri tavalla.

Sen jälkeen S-kirjaimen paikka voidaan valita 5 eri tavalla.
Sen jälkeen K-kirjaimen paikka voidaan valita 4 eri tavalla.
Sen jälkeen U-kirjaimen paikka voidaan valita 3 eri tavalla.
Sen jälkeen E-kirjaimen paikka voidaan valita 2 eri tavalla.
Sen jälkeen T-kirjaimen paikka voidaan valita 1 eri tavalla.

Nyt $n = 55 \cdot 126 \cdot 5! = 831600$

PB7.5

Opiskelijakunnan hallitus, johon kuului 7 henkilöä päätti ottaa osaa piirialueen viestimaastojuoksumestaruuskilpailuihin. Kyseiseen kilpailuun osallistutaan 4-henkisellä joukkueella.

a) Montako erilaista joukkuetta hallitukseta pystyi muodostamaan, kun ei kiinnitetä huomiota viestijärjestykseen ?

b) Montako erilaista joukkuetta hallitukseta pystyi muodostamaan erilaisilla viestijärjestyksillä?

a) Viestijoukkue voidaan muodostaa $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ eri tavalla. Siis k-kombinaatio.

b) Viestijoukkue voidaan muodostaa $\binom{7}{4} 4! = \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot 4! = 840$ eri tavalla. Tai k-permutaatio

$\frac{7!}{(7-4)!} = 840$ eri tavalla.

PA7.6

Erääseen tennisturnaukseen osallistui 6 pelaajaa. Järjestäjät suunnittelivat sarjan, jossa kaikki pelaajat pelaavat toisiaan vastan kaksi kertaa. Montako tennisottelua turnauksessa siten pelataan?

Sarjan 2-permutaatioiden lukumäärä on $n = \dfrac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30$

Kaksinkertaisessa sarjassa pelataan siis 30 eri ottelua.

PB7.7

Korttipakasta on eroteltu omaksi pakakseen kaikki hertat. Herttamaan kortit ovat tavalliset numerokortit 1-10 ja kuvakortit 11-13. Kuinka monta eri vaihtoehtoa on nostaa erotellusta pakasta kaksi kuvakorttia ja yksi numerokortti.

Hertassa on siis numerokortteja: 1-10 eli 10 kpl. Kuvakortteja 11-13 eli 3 kpl.
Kortit voidaan valita järjestyksissä: NKK, KNK tai KKN

Silloin $10 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 10 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 10 = 180$ eri tavalla

Tai: $\binom{10}{1}\binom{3}{2}3! = 180$

PA7.8

Korttipakassa on 52 korttia, 4 maata: hertta, ruutu, risti ja pata. Kunkin maan kortit numeroidaan 1 - 13. Korttipakasta valitaan neljä korttia. Montako vaihtoehtoa on valita neljä samansuuruista korttia kaksi kertaa peräkkäin?

Neljän kortin, eri maan sama numero voidaan valita 13 eri tavalla. Sen jälkeen toisen neljän kortin, eri maan sama numero voidaan valita 12 eri tavalla. Siis 13 * 12 = 156

SB7.9

Korttipakassa on 52 korttia, 4 maata: hertta, ruutu, risti ja pata. Kunkin maan kortit numeroidaan 1 - 13. Korttipakasta valitaan viisi korttia. Kuinka monella eri tavalla ne voidaan valita, kun

a) kaikki ovat samaa maata ?

b) kortit ovat pataa tai ruutua?

c) valituissa korteissa on neljä samansuuruista korttia?

d) valituissa korteissa on kolme samansuuruista ja kaksi samansuuruista korttia?

a) Viisi korttia samasta maasta voidaan valita $\binom{13}{5}$ eri tavalla ja neljä maata voidaan valita 4 eri tavalla, joten

$$\binom{13}{5}4 = 5148$$

b) $\binom{26}{5} = 65780$

c) Neljän kortin, eri maan sama numero voidaan valita 13 eri tavalla. Viides kortti voidaan valita 48 eri tavalla: Siis 13 * 48 = 624

d) Ensin valituissa korteissa on kolme samansuuruista ja ne valitaan $13\binom{4}{3} = 52$ eri tavalla. Kaksi samansuuruista korttia valitaan sitten $12\binom{4}{2} = 72$ eri tavalla. Siis 52 * 72 = 3744 eri tavalla.

SB7.10

Veikkauksen Jokeri-pelissä arvotaan seitsemän numeron sarjoja, jossa kukin numero saa arvot välillä 0- 9. Kun asiakas arvaa mitkä tahansa 2 numeroa numerosarjasta, niin hänellä on 2 oikein tulos. Kun asiakas arvaa mitkä tahansa 3 numeroa numerosarjasta, niin hänellä on 3 oikein tulos. Näin menetellään myös tästä ylöspäin.

a) Montako eri numerosarjaa Jokeri-pelissä voidaan arpoa?

b) Satunnaisella asiakkaalla on kaksi oikein tulos. Motako eri vaihtoehtoa on olla kaksi oikein tulos?

a) Jokerinumerot voidaan arpoa $10^7 = 10000000$ eli 10 milj. eri tavalla.

b) Mitkä tahansa kaksi numeroa oikein 7 numeron joukossa on $\binom{7}{2} = 21$.

SA7.11

Montako erilaista Eurojackpotriviä voidaan muodostaa järjestelmästä, jossa on seitsemän päänumeroa ja 4 tähtinumeroa?

$\binom{7}{6}\binom{4}{2} = 42$ eri riviä.

SB7.12

Suomalaisessa lotossa eräs asiakas pelasi 10 ruksin järjestelmää. Arvonnan jälkeen asiakas totesi, että järjestelmäruudukossa on 6 oikein tulos. Montako kertaa järjestelmän perusteella on 6 oikein tuloksia? Montako kertaa järjestelmän perusteella on 5 tai 4 oikein tuloksia?

10 ruksin järjestelmä ja 6 lottopalloa osuu järjestelmään. Siis

6 oikein tuloksia: $\binom{6}{6}\binom{4}{1} = 4$ eri riviä.

5 oikein tuloksia: $\binom{6}{5}\binom{4}{2} = 36$ eri riviä.

4 oikein tuloksia: $\binom{6}{4}\binom{4}{3} = 60$ eri riviä.

SB7.13

Asiakas pelasi 9-ruksin järjestelmälottoa ja sai 5 oikein tulos. Minkälaisia voittoja hän sai ja minkä verran, voittoluokissa 5 ja 4 oikein.

9 ruksin järjestelmä ja 5 lottopalloa osuu järjestelmään. Siis

5 oikein tuloksia: $\binom{5}{5}\binom{4}{2} = 6$ eri riviä.

4 oikein tuloksia: $\binom{5}{4}\binom{4}{3} = 20$ eri riviä.

SB7.14

Yhdessä matematiikan ryhmässä oli 9 opiskelijaa, jotka halusivat perjantai-iltapäivällä pitää matikkapajaa, 5 poikaa ja 4 tyttöä.

a) Kävi kuitenkin niin, että yksi matikkapajalle halukas opiskelija sairastui. Montako erilaista kokoonpanoa saattoi matikkapajalle osallistua?

b) Kävi kuitenkin niin, että kaksi matikkapajalle halukasta opiskelijaa sairastui. Montako erilaista kokoonpanoa saattoi matikkapajalle osallistua?

a) Jos sairastunut oli tyttö niin: $\binom{5}{5}\binom{4}{3} = 4$

Jos sairastunut oli poika niin: $\binom{5}{4}\binom{4}{4} = 5$ Siis yhdeksän eri kokoonpanoa.

b) Sairastapaukset:

2 tyttöä 0 poikaa: $\binom{5}{5}\binom{4}{2} = 6$

1 tyttöä 1 poika: $\binom{5}{4}\binom{4}{3} = 20$

0 tyttöä 2 poikaa: $\binom{5}{3}\binom{4}{4} = 10$ Siis yhteensä 36 eri kokoonpanoa.

Huomaa sukupuolella ei todellakaan ole merkitystä:

Kokoonpanot voi laskea myös $\binom{9}{2} = 36$

SB7.15

Yhdessä matematiikan ryhmässä oli 30 opiskelijaa, joista 9 opiskelijaa halusi perjantai-iltapäivällä pitää matikkapajaa, 5 poikaa ja 4 tyttöä. Kävi kuitenkin niin, että kaksi matikkapajalle halukasta opiskelijaa sairastui. Montako erilaista kokoonpanoa saattoi matikkapajalle osallistua?

$$\binom{30}{9}\binom{9}{2} = 515057400$$

SB7.16

Eräässä ryhmässä oli 20 opiskelijaa, 12 tyttöä ja 8 poikaa. Kuinka monella tavalla ryhmästä voi valita 4 opiskelijaa? Luettele erilaisten tyttö - poika kokoonpanojen lukumäärät!

Opiskelijoita voidaan valita $\binom{20}{4} = 4845$ eri tavalla.

Merkitään T = Tyttö ja P = Poika
Valinnat:

a) (4T, 0P): $\binom{12}{4}\binom{8}{0} = 495$

b) (3T, 1P): $\binom{12}{3}\binom{8}{1} = 1760$

c) (2T, 2P): $\binom{12}{2}\binom{8}{2} = 1848$

d) (1T, 3P): $\binom{12}{1}\binom{8}{3} = 672$

e) (0T, 4P): $\binom{12}{0}\binom{8}{4} = 70$

SA7.17

Vikinglottoa pelataan Suomessa, Norjassa, Tanskassa, Ruotsissa, Islannissa, Virossa, Latviassa, Liettuassa ja Sloveniassa. Vikinglottopelissä valitaan kuusi päänumeroa väliltä 1-48 ja yksi vikingnumero väliltä 1-8. (ks. https://www.veikkaus.fi/fi/vikinglotto#!/ohjeet) Satunnainen asiakas pelasi Vikinglottoa 7 + 1 järjestelmällä. Hänen järjestelmään osui 5 varsinaista vikinglottonumeroa ja vikingnumero. Voittoluokat ovat: 6+1, 6+0, 5+1, 5+0, 4+1, 4+0, 3+1, 3+0. Mitä voittoja ja minkä verran oli satunnaisen pelaajan kupongissa?

Vikinglottoa 7 + 1 järjestelmällä. Hänen järjestelmään osui 5 varsinaista vikinglottonumeroa ja vikingnumero.

Koska pelaajalla on vikignumero oikein niin hän osallistuu voittoluokkiin, jossa vikingnumero on:

5 + 1 oikein tuloksia: $\binom{5}{5}\binom{2}{1} = 2$ eri riviä.

4 + 1 oikein tuloksia: $\binom{5}{4}\binom{2}{2} = 5$ eri riviä.

3 + 1 oikein tuloksia ei voida muodostaa: $\binom{5}{3}\binom{2}{x}$ koska 3+x pitäisi olla 6, mikä on mahdotonta.