PA8.1

PA8.1

Oikea vastaus

Heitetään säännöllistä heksaedrin muotoista noppaa. Millä todennäköisyydellä saadaan 3:lla jaollinen silmäluku?

✔ 1/3

Heitetään kahta säännöllistä heksaedrin muotoista noppaa. Millä todennäköisyydellä molempien noppien silmäluvut ovat parillisia?

✔ 2/8

PA8.2

Samalle pitkälle penkille istuu sattumanvaraisesti 7 henkilöä, joista viisi on naisia. Millä todennäköisyydellä kaksi miestä ei istu peräkkäin?

Miesten paikat voidaan valita $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2!} = 21$ eri tavalla.

Tapahtumat, joissa miehet ovat peräkkäin on 6 kpl $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7)\}$

$$N(A) = \frac{21-6}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

PB8.3

Korttipakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä. Pelaaja ottaa pakasta umpimähkään 4 korttia. Mikä on todennäköisyys, että i) kaikki ovat ässiä, ii) mikään ei ole ässä? (S1992/4b)

i) Pakasta voi ottaa neljä korttia $\binom{52}{4} = 270725$ eri tavalla.

Neljä ässää voi ottaa vain yhdellä tavalla: $P(\text{"Neljä ässää"}) = \frac{1}{270725}$

ii) On 48 korttia, jotka eivät ole ässiä. 48 kortin joukosta voi ottaa neljä korttia $\binom{48}{4} = 194580$ eri tavalla.

$$P(\text{"Ei yhtään ässää"}) = \frac{194580}{270725} \approx 0,72$$

PA8.4

Ruletti on rahapeli, jossa yritetään arvata kuulan pysähtymiskohtaa pyöritettävässä ruletissa. Euroopassa on käytössö ruletti, jossa on numerot $(0–36)$. Ameriikkalaisessa ruletissa on pysähtymiskohdat numeroitu $(0–36$ ja $00)$. Ruletin kuula pyörii ympyrään nähden vastapäivään ympyrän kehällä. Ympyrän kehällä joka toinen numero on väriltään punainen ja joka toinen musta välillä 1–36. Nolla on yleensä vihreä.

(CC-BY, Pixabay)

Laske todennäköisyys sille, että yhdellä rulettikierroksella ruletin kuula jää pysähtymiskohtaan:

a) 0.

b) parillinen luku.

c) kuudella jaollinen luku.

Nyt $N(E) = 37$

a) $P(A) = \dfrac{1}{37}$

b) $P(B) = \dfrac{19}{37}$. Numero nolla tulkitaan parilliseksi luvuksi.

c) $P(C) = \dfrac{6}{37}$. Kuudella jaollisia lukuja ovat kolmella ja kahdella jaolliset luvut.

PB8.5

Kun heitetään kahta painottamatonta arpakuutiota yhtä aikaa. Millä todennäköisyydellä niiden summa on vähintään 8? Kokeile ratkaista tämä tehtävä LibreOfficen Calcilla.

LibreOfficen calcilla:

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Summat	2	1				
	3	2				
	4	3				
	5	4				
	6	5				
	7	6				
	8	5	Summa väh 8			
	9	4	15 kpl			
	10	3				
	11	2				
	12	1				

Siis $P(A) = \dfrac{15}{36}$ Siis kahden arpakuution summa on vähintään 8 todennäköisyydellä $41,7\%$.

PB8.6

Korttipakassa on 52 korttia, neljä maata: risti, pata, hertta ja ruutu. Kussakin maassa ovat kortit numeroitu $1-13$. Pelaaja ottaa pakasta umpimähkään 5 korttia.

a) Millä todennäköisyydellä kaikki viisi korttia ovat ruutuja?

b) Millä todennäköisyydellä kaikki viisi korttia ovat herttoja tai ruutuja?

c) Millä todennäköisyydellä kaikki viisi korttia ovat samaa maata?

a) Korttipakasta voidaan valita viisi korttia $\binom{52}{5}$ eri tavalla.

Ruuduista voidaan valita viisi korttia $\binom{13}{5}$ eri tavalla.

Siis $P(A)=\dfrac{5!\cdot 8!\cdot 13!}{52!\cdot 8!\cdot 5!}=\dfrac{13!}{52!}=\dfrac{33}{66640}$

b) Nyt $P(B)=2\cdot\dfrac{5!\cdot 8!\cdot 13!}{52!\cdot 8!\cdot 5!}=2\cdot\dfrac{13!}{52!}=\dfrac{33}{33320}$ Huomaa, että hertta tai ruutu voidaan valita 2:lla eri tavalla.

c) Nyt $P(C)=4\cdot\dfrac{5!\cdot 8!\cdot 13!}{52!\cdot 8!\cdot 5!}=4\cdot\dfrac{13!}{52!}=\dfrac{33}{16660}$ Siis valintojen määrä nousee neljään.

SA8.7

Laatikossa on viisi korttia, joissa kolmessa on kirjain M ja kahdessa kirjain A. Kortit poimitaan umpimähkäisessä järjestyksessä. Mikä on todennäköisyys sille, että syntyy sana MAMMA? (s1986/6)

3:n M-kirjaimen paikka voidaan valita viisikiraimisessa sanassa $\binom{5}{3}=10$ eri tavalla. Tämä on samalla sanojen lukumäärä. Joten

$P(A)=\dfrac{1}{10}$

Toisin:

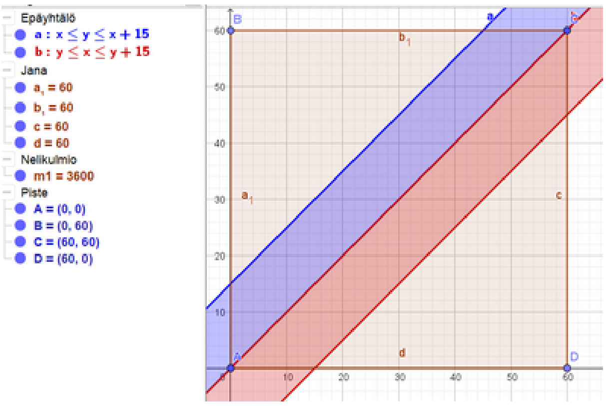
Tuloperiaatten mukaisesti $P(\text{"MAMMA"})=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{10}$

SB8.8

Henkilöt A ja B käyvät päivittäin samassa kahvilassa. Kumpikin saapuu kahvilaan sattumanvaraiseen aikaan klo 9.00 ja 10. 00 välillä ja viipyy siellä 15 minuuttia. Mikä on todennäköisyys sille, että he ovat kahvilassa tiettynä päivänä samalla hetkellä? (K1993/9a)

Tulkoon ja olkoon henkilö A kahvilassa epäyhtälön $x \leqslant y \leqslant x + 15$ ja

tulkoon ja olkoon henkilö B kahvilassa epäyhtälön $y \leqslant x \leqslant y + 15$ mukaisesti.



Kaikki tapahtumat ovat neliön $A = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$ pisteitä.

Neliön ala on $A_N = 60 \cdot 60 = 3600$ (pay)

Suotuista alue on $A_S = 2(\frac{60 \cdot 60}{2} - \frac{45 \cdot 45}{2}) = 1575$ (pay)

$$P(A) = \frac{A_S}{A_N} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16} = 0,4375$$

Vastaus: Henkilöt A ja B ovat kahvilassa samalla hetkellä noin 44%:n todennäköisyydellä.

SA8.9

Laatikosta, jossa on kolme punaista, neljä sinistä ja viisi mustaa palloa, otetaan umpimähkään kaksi palloa. Mikä on todennäköisyys, että ne ovat samanväriset? (S1991/5a)

Palloja on siis yhteensä 12.

Todennäköisyys sille että molemmat pallot ovat punaisia on: $P(A) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132}$

Todennäköisyys sille että molemmat pallot ovat sinisiä on: $P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{12}{132}$

Todennäköisyys sille että molemmat pallot ovat punaisia on: $P(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{20}{132}$

Nyt $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{38}{132} = \frac{19}{66} \approx 0,29$ Eli siis 29%

SB8.10

Kolminumeroisten positiivisten kokonaislukujen joukosta valitaan umpimähkään yksi luku. Millä todennäköisyydellä tämä on jaollinen 3 :lla tai 5 :llä? (S1977/6a)

Kolminumeroisia positiivisia kokonaislukuja ovat $100 - 999$. Kolmella jaollisa on 300 kpl, viidellä jaollisia on 180 ja 15 :sta jaollisia on 60 . Nyt todenäköisyys saadaan laskettua seuraavasti:

$P(A) = \frac{300 + 180 - 60}{900} = \frac{7}{15} \approx 0,47$ eli noin 47% todennäköisyydellä.

SB8.11

Taikurin hatussa on 4 vihreää omenaa ja 5 punaista omenaa. Hatusta nostetaan umpimähkään 4 hedelmää. Satunnaismuuttujalla $\underline{x}$ kuvataan vihreiden omenien lukumäärä. Laske todennäköisyydet $P\left(\underline{x} = 1\right)$ ja $P\left(\underline{x} = 4\right)$.

1. Kun vihreitä omenoita on 1 ja punaisia omenoita 3 , niin $P(\underline{x} = 1) = \dfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{9}{4}} =$

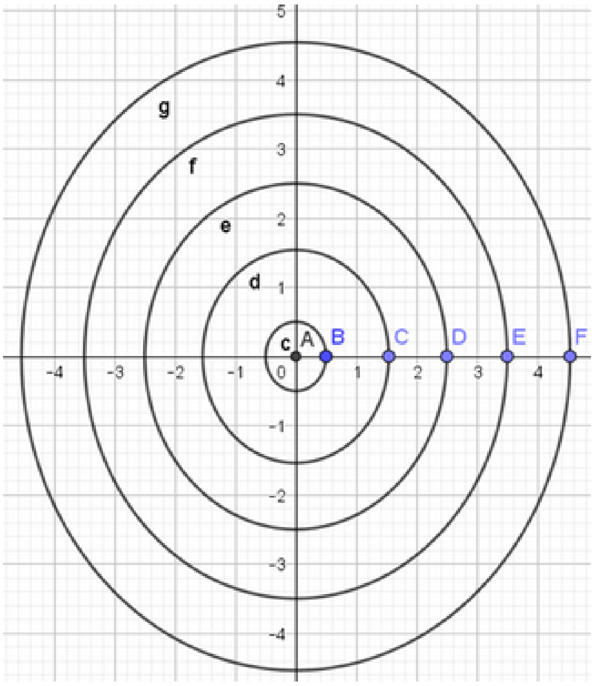
$\frac{5 \cdot 4}{126} = \frac{20}{126}$

2. Kun vihreitä omenoita on 4 ja punaisia omenoita 0 , niin $P(\underline{x} = 4) = \dfrac{\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{9}{4}} =$

$\frac{5 \cdot 1}{126} = \frac{5}{126}$

SB8.12

Tikanheitossa heitetään tikkaa tikkatauluun. Pelin idea on osua tikalla mahdollisimman lähelle numeroa 10, mikä on pyöreän tikkataulun keskellä. Numeron kymmenen alueelta saa kymmenen pistettä, numeron yhdeksän alueelta saa yhdeksän pistettä ja niin edespäin. Oletetaan, että eräs pelaaja osuu joka heittokerralla pistealueen 6-10 sisälle. Mikä on todennäköisyys sille, että Tähtipelaajan osuus numeron 9 tai 10 alueelle heittäessään yksittäistä tikkaa? Voit olettaa, että numero kymmenen on 1 cm halkaisijaltaan ja muiden numeroiden kehän leveys kukin 1 cm.



Kuva 1. Tikkataulun mallinnus

Kuvassa 1 pistealueen 10 säde $r_{10} = \frac{1}{2}$ ja sen pinta-ala $A_{10} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

Kuvassa 1 pistealueen 9 säde $r_9 = \frac{3}{2}$ ja sen pinta-ala $A_9 = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\pi$

Pistealueen 9 - 10 pinta-ala on $\frac{9}{4}\pi$

Koko pistealueen 6-10 pinta-ala on $A_{6-10} = \pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}\pi$

Se todennäköisyys, että yksittäisen tikka osuu alueelle, 9-10 on:

$p_{9-10} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$

SB8.13

Hae kevään 2015 ylioppilaskirjoitusten tuloksia Internetistä, osoitteesta:

https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/stat/FS2017A2015T4002.pdf

Laske todennäköisyys, että satunnaisesti valittu ylioppilaskokelas on saanut pitkän englannin:

a) läpi.

b) arvosanaksi eximian (E) tai Laudaturin (L)

Arvosanajakaumat 2015 - 2017, Englanti, pitkä oppimäärä

			Arvosana															
Kaikki koulut			L		E		M		C		B		A		I		Yhteensä	
			Lkm	%	Lkm	%	Lkm	%	Lkm	%	Lkm	%	Lkm	%	Lkm	%	Lkm	Keskiarvo
2015	Kevät	Miehet	624	7,3	1 911	22,3	2 164	25,2	1 987	23,2	1 238	14,4	522	6,1	137	1,6	8 583	4,6
		Naiset	436	3,5	1 730	14,1	2 582	21,0	3 213	26,1	2 586	21,0	1 319	10,7	437	3,6	12 303	4,0
		Yhteensä	1 060	5,1	3 641	17,4	4 746	22,7	5 200	24,9	3 824	18,3	1 841	8,8	574	2,7	20 886	4,3

Kirjoittajia on yhteensä $N(E) = 20886$

a) Pitkässä englannissa läpi $N(A) = 20886 - 574 = 20312$

Läpipääsytodennäköisyys: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(E)} = \dfrac{20312}{20886}$

$\approx 0,9725$ Eli noin $97,3\%$

b) Excimian ja laudaturien lukumäärä $N(B) = 3641 + 1060 = 4701$

Siis E:n tai L:n todennäköisyys:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(E)} = \frac{4701}{20886}$$

$\approx 0,2251$ Eli noin $22,5\%$

SB8.14

Kaksitoista henkilöä asettuu jonoon umpimähkäisesti. Millä todennäköisyydellä henkilöt A ja B asettuvat niin, että heidän välissään on korkeintaan kaksi henkilöä? (S1981/7b)

Henkilöt A ja B voivat asettua jonoon $12 \cdot 11 = 132$ eri tavalla. Kun henkilö A on valinnut paikan, niin B:n on valittava paikka siten, että välissä on korkeintaan kaksi henkilöä. Olkoot paikat 1-12.

Jos A=1, niin B= 2, 3, 4: n=3
Jos A=2, niin B= 1, 3 ,4, 5: n=4
Jos A=3, niin B= 1, 2, 4, 5, 6: n=5
Jos A=4, niin B= 1, 2, 3, 5, 6, 7: n=6
Jos A=5, niin B= 2, 3, 4, 6, 7, 8: n=6
Jos A=6, niin B= 3, 4, 5, 7, 8, 9: n=6
Jos A=7, niin B= 4, 5, 6, 8, 9, 10: n=6
Jos A=8, niin B= 5, 6, 7, 9, 10, 11: n=6
Jos A=9, niin B= 6, 7, 8, 10, 11, 12: n=6
Jos A=10, niin B= 7, 8, 9, 11, 12: n=5
Jos A=11, niin B= 8, 9, 10, 12: n=4
Jos A=12, niin B= 9, 10, 11: n=3

Yhteensä 60 kpl

Siis $P(A) = \dfrac{60}{13'2} = \dfrac{5}{11}$

SB8.15

Kymmenestä henkilöstä, joiden joukossa on kaksi veljestä, muodostetaan arpomalla kaksi viisihenkistä työryhmää. Millä todennä köisyydellä veljekset joutuvat eri ryhmään? (K1978/6b)

Ratkaisu:

Kymmenestä henkilöstä voidaan valita 5 henkilöä $\binom{10}{5} = 252$ eri tavalla.

Valitaan 5 henkiseeen toimikuntaan veljeksistä toinen $\binom{2}{1}$ ja kahdeksasta neljä: $\binom{8}{4}$

Siis $P(A) = \dfrac{\binom{2}{1} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{5}{9}$

Vastaus: Veljekset joutuvat eri ryhmään 55,6 %:n todennäköisyydellä.

SB8.16

Kolmihenkisen toimikunnan jäsenet valitaan arvalla kolmen naisen ja viiden miehen joukosta. Millä todennäköisyydellä ainakin kaksi miestä joutuu toimikuntaan? (K1976/7b)

Kahdeksasta henkilöstä voidaan valita 3 henkilöä toimikuntaan $\binom{8}{3} = 56$ eri tavalla.

Ainakin kaksi miestä tarkoittaa tapauksia kaksi miestä ja kolme miestä.

Siis $P(A) = \dfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} + \dfrac{\binom{3}{0} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{5}{7}$

Vastaus: Ainakin kaksi miestä joutuu toimikuntaan 71,4 %:n todennäköisyydellä.