PA9.2

Taikurilla on hatussa neljä keltaista ja kolme sinistä superpalloa. Hatusta otetaan umpimähkään yksi superpallo ja sen jälkeen otetaan vielä toinen superpallo.

a) Jos superpalloja ei palauteta takaisin hattuun, niin: Millä todennäköisyydellä ensimmäinen otettu superpallo on keltainen ja toinen sininen?

b) Jos otannan jälkeen superpallo aina palautetaan hattuun, niin : Millä todennäköisyydellä ensimmäinen nostettu superpallo on keltainen ja toinen sininen?

c) Jos otannan jälkeen superpallo aina palautetaan hattuun, niin: Millä todennäköisyydellä hatusta on saatu nostettua kaksi keltainen superpalloa?

a) $P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \approx 0,29$

b) $P(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49} \approx 0,24$

c) $P(C) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49} \approx 0,33$

PA9.3

Monivalintakokeessa on neljä kysymystä ja kussakin kohdassa on kolme vaihtoehtoa. Eräs opiskelija vastaa koekysymyksiin pelkästään arvaamalla.

a) Millä todennäköisyydellä kaikki neljä arvausta ovat oikein?

b) Millä todennäköisyydellä yksikään arvaus ei ole oikein?

Nyt monivalinnassa yksi kohta menee oikein todennäköisyydellä $p = \frac{1}{3}$

Nyt monivalinnassa yksi kohta menee väärin todennäköisyydellä $q = \frac{2}{3}$

a) $P(A) = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81} \approx 1,2\%$

b) $P(B) = (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81} \approx 19,8\%$

PA9.4

Ampumahiihtäjä Kaisa Mäkäräinen on makuuammuntapaikalla ja hänellä on kaksi patruunaa vielä laukaisematta. Tilastojen mukaan Kaisa osuu makuuammunnassa tauluun onnistuneesti 90 %:n todennäköisyydellä.

a) Millä todennäköisyydellä molemmat kaksi viimeistä laukausta osuvat tauluun onnistuneesti?

b) Millä todennäköisyydellä kumpikaan laukauksista ei osu tauluun onnistuneesti?

c) Millä todennäköisyydellä vain toinen laukaus onnistuu?

Olkoon osuma $p = \frac{9}{10}$ ja ei osuma $q = \frac{1}{10}$

a) $P(A) = P(\text{"}pp\text{"}) = (\frac{9}{10})^2 = \frac{81}{100} = 81\%$

b) $P(B) = P(\text{"}qq\text{"}) = (\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{100} = 1\%$

c) $P(C) = P(\text{"}pq + qp\text{"}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{100} = 18\%$

SA9.5

Erästä peliä pelaa kolme yhtä taitavaa pelaajaa A, B ja C. Kukin pelaaja saa voitosta pisteen, ja lopullinen voittaja on se pelaaja, joka ensiksi saa kolme pistettä. A voittaa ensimmäisen pelin, B toisen ja kolmannen. Mikä on todennäköisyys sille, että C on lopullinen voittaja? (K1994/5)

Merkitään pelaajan A voittoa A:lla ja vastaavasti pelaajan B voittoa B:llä sekä pelaajan C voittoa C:llä.
Pelaajan C:n lopulliselle voittolle, jossa C saisi 3 pistettä on suotuisat vaihtoehdot seuraavat:

$ACCC, CACC, CCAC$ ja CCC.

Kaikki pelaajat ovat yhtä taitavia, joten jokaisen voittotodennäköisyys on $\frac{1}{3}$.

Nyt $P(ACCC) = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

Nyt $P(CACC) = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

Nyt $P(CCAC) = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

Nyt $P(CCC) = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$

Edelleen $P(ACCC) + P(CACC) + P(CCAC) + P(CCC) = \frac{1}{81} + \frac{1}{81} + \frac{1}{81} + \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$

$\approx 0,07$ eli 7%

SB9.6

Tavalliseen korttipakkaan kuuluu 52 korttia, joista 4 on ässiä. Täydestä pakasta vedetään umpimähkään kortti, sitten toinen kortti ja tämän jälkeen vielä kaksi korttia. Vedettyjä kortteja ei panna takaisin pakkaan. 1° Millä todennäköisyydellä ensimmäinen kortti on ässä? 2° Jos ensimmäinen kortti oli ässä, niin millä todennäköisyydellä toinen on ässä? 3° Jos ensimmäinen ja toinen kortti olivat ässiä, niin millä todennäköisyydellä viimeiset kaksi korttia ovat ässiä? (S1998/5a)

1° $P(A) = \frac{4}{52} \approx 0,077$ eli $7,7\%$

2° $P(B) = \frac{3}{51} \approx 0,059$ eli $5,9\%$

3° $P(C) = \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \approx 0,00082$ eli $0,1\%$

SB9.7

Laite koostuu kolmesta toiminnallisesti riippumattomasta komponentista A, B ja C, joiden vikaantumistodennäköisyydet takuuaikana ovat $p_A = 0,01$, $p_B = 0,007$ ja $p_C = 0,05$. Laite ei toimi, jos yksikin komponenteista on viallinen. Mikä on laitteen vikaantumistodennäköisyys takuuaikana? Luotettavuuden parantamiseksi komponentti C kahdennetaan, ts. laite varustetaan kahdella rinnakkaisella, toisistaan riippumattomalla komponentilla C, ja riittää, että ainakin toinen näistä toimii. Mikä on tällöin vikaantumistodennäakÖisyys takuuaikana? (S2004/5)

Komponemttien A, B ja C vikaantumistodennäöisyyksien mukaisesti laitteen toimintavarmuus takuuaikana on $P(A) = (1-p_A)(1-p_B)(1-p_C) \approx 0,9339$. Laitteen vikaantumistodennäköisyys on puolestaan $1 - P(A) \approx 0,0661$. Kun komponentti C kahdennetaan, niin laitten toimintavarmuus on $P(B) = (1-p_A)(1-p_B)(1-p_C^2) \approx 0,9806$. Tällöin laitteen vikaantumistodennäköisyys on $1 - P(B) \approx 0,0194$.

SA9.8

Laatikossa on kaksi eriväristä palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo, pannaan se takaisin ja nostetaan taas umpimähkään pallo. Mikä on todennäköisyys, että nostetut pallot ovat eriväriset?

Mikä on vastaava todennäköisyys, jos laatikossa onkin kolme keskenän eriväristä palloa ja samalla tavalla nostetaan kaksi palloa? (K2010/6)

Tarkastellaan aluksi kahta eriväristä palloa.

Nyt haluttu todennäköisyys lasketaan $P(A) = \frac{1}{2}$. Ensimäisen pallon nostolla ei ole merkitystä. Kun kahdesta erivärisestä pallosta nostetaan toisen kerran pallo, on se erivärinen em. todennäköisyydellä.

Tarkastellaan aluksi kolmea eriväristä palloa.

Nyt haluttu todennäköisyys lasketaan $P(A) = \frac{2}{3}$. Ensimäisen pallon nostolla ei ole edelleenkään merkitystä. Kun toisen kerran nostetaan palloa on siellä kaksi suotuisaa tapausta!

SB9.9

Eräällä paikkakunnalla sataa 60 prosentin todennäköisyydellä, jos edellisenä päivänä on satanut; poutasään todennäköisyys on tällöin 40 prosenttia. Jos taas edellisenää päivänä on ollut pouta, sateen todennäköisyys on vain 20 prosenttia ja poudan todennäköisyys vastaavasti 80 prosenttia. Millä todennäköisyydellä ylihuomenna sataa, kun tänään on pouta? (S2001/5)

Merkitään todennäköisyyksiä:

Poutapäivän jälkeen: seuraavana päivänä on pouta $p_1 = 0,8$ tai sadetta $q_1 = 0,2$.

Sadepäivän jälkeen: seuraavana päivänä on pouta $p_2 = 0,4$ tai sadetta $q_2 = 0,6$.

Siis ylihuomenna sataa todennäköisyydellä:

$$P(A) = p_1 \cdot q_1 + q_1 \cdot q_2 = \; 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,28\,.$$

Vastaus: Ylihuomenna sataa 28% todennäköisyydellä.

SB9.10

Laatikossa on 2 ruskeaa, 6 mustaa ja 8 sinistä matkapuhelimen kuorta. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi kuorta. Millä todennäköisyydellä kuoret ovat samanväriset? (S2005/8)

Matkapuhelimen kuoria on siis yhteensä 16 kappaleetta.

Niistä voidaan valita kaksi matkapuhelimen kuorta $\binom{16}{2} = 120$ eri tavalla.

Ruskeat matkapuhelimen kuoret voi valita $\binom{2}{2} = 1$ eri tavalla.

Mustat matkapuhelimen kuoret voi valita $\binom{6}{2} = 15$ eri tavalla.

Siniset matkapuhelimen kuoret voi valita $\binom{8}{2} = 28$ eri tavalla.

Siis samanväriset kuoret voi valita $1 + 15 + 28 = 44$ eri tavalla. Klassisen todennäköisyysperiaatten mukaisesti:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(E)} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \approx 0,3667.$$

Vastaus: Samanväriset matkapuhelimen kuoret voi valita noin 37%:n todennäköisyydellä.

SB9.11

Tilastojen mukaan eräässä pääsykuulustelussa 25 % pyrkijöistä epäonnistuu matematiikan ja 17 % fysiikan kokeessa. Pyrkijöistä 10 % epäonnistuu kummassakin kokeessa. Laske todennäköisyys, että fysiikan kokeessa epäonnistunut pyrkijä epäonnistuu myös matematiikan kokeessa. Millä todennäköisyydellä pyrkijä epäonnistuu ainakin toisessa kokeessa? (K2003/4)

Olkoon pyrkijöitä pääsykuulustelussa $100a$. Pyrkijöistä siis epäonnistuu molemmissa kokeissa $10a$, vain matematiikassa $25a - 10a = 15a$ ja vain fysiikassa $17a - 10a = 7a$.

Merkitään matematiikan kokeessa epäonnistuu todennäköisyydellä $P(M) = \frac{25}{100}$

Merkitään fysiikan kokeessa epäonnistuu todennäköisyydellä $P(F) = \frac{17}{100}$

Merkitään matematiikan ja fysiikan kokeessa epäonnistuu todennäköisyydellä $P(M \cap F) = \frac{10}{100}$

Nyt fysiikassa epäonnistunut pyrkijä epäonnistuu myös matematiikassa todennäköisyydellä

$$P(F|M) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} =$$

$$\frac{\frac{10}{100}}{\frac{17}{100}} = \frac{10}{17} \approx 59\%.$$

Pääsykokeissa pyrkijä eponnistuu ainakin toisessa kokeessa todennäaköisyydellä

$P(C) = \frac{25a + 7a}{100a} = 0,32$ eli 32%:n todennäköisyydellä.