PA10.2

Teemu Pukki on hyvä maalintekijä jalkapallossa. Näyttää olevan, että yksittäisessä Valio-liigan ottelussa Teemu ei saa maalia todennäköisyydellä $p_1 = \frac{2}{5}$ ja saa maalin todennäköisyydellä $p_2 = \frac{3}{5}$. Millä todennäköisyydellä kolmessa peräkkäisessä jalkapallo-ottelussa Teemu saa maalin vain yhdessä ottelussa?

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \quad \frac{36}{125} = 28,8\%$$

PB10.3

Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kolminumeroinen, positiivinen kokonaisluku on jaollinen kahdella tai kolmella?

Katso tarvittaessa vinkkiä Luvusta 5.

Ratkaisu: kolminumeroisia positiivisia kokonaislukuja ovat 100 - 999

Ensimmäinen kahdella jaollinen luku tässä joukossa on 100

Kolmenumeroisia kahdella jaollisia positiivisia kokonaislukuja on seuraavasti:

Olkoon $a_1 = 100$ja $a_n = a_1 + (n-1)2$

Kun $a_n = 998$, niin $a_1 + (n-1)2 = 998$

$100 + (n-1)2 = 998$, josta $n = 450$

Kolmenumeroisia kolmella jaollisia positiivisia kokonaislukuja on seuraavasti:

Olkoon $a_1 = 102$ja $a_n = a_1 + (n-1)3$

Kun $a_n = 999$, niin $12 + (n-1)2 = 99$

$102 + (n-1)3 = 999$, josta $n = 300$

Kolmenumeroisia kuudella jaollisia positiivisia kokonaislukuja on seuraavasti:

Olkoon $a_1 = 102$ja $a_n = a_1 + (n-1)6$

Kun $a_n = 996$, niin $102 + (n-1)6 = 996$

$102 + (n-1)6 = 996$, josta $n = 150$

Siis $P(A tai B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{450}{900} + \frac{300}{900} - \frac{150}{900} = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$

PB10.4

Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kolminumeroinen, positiivinen kokonaisluku on jaollinen kahdella tai viidellä? Kokeile ratkaista tämä tehtävä LibreOfficen calcilla.

B	C	D	E
Määrä	450	180	90
kolminumeroiset luvut	kahdella jaolliset	viidellä jaolliset	kymmenellä jaolliset
100	0	0	0
101	1	1	1
102	0	2	2
103	1	3	3
104	0	4	4
105	1	0	5
106	0	1	6
107	1	2	7
108	0	3	8

Olkoon $N(A) = 450$ kahdella jaolliset luvut.

Olkoon $N(B) = 180$ viidellä jaolliset luvut.

Olkkoon $N(A \cap B) = 90$ kymmenellä jaolliset lut.

Nyt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$\frac{450}{900} + \frac{180}{900} - \frac{90}{900} = \frac{540}{900} = 0,6$$

Vastaus: Satunnaisesti valittu positiivinen kolminumeroinen luku on jaollinen kahdella tai viidellä 60%:n todennäköisyydellä.

PB10.5

Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu negatiivinen ja kolminumeroinen kokonaisluku on jaollinen neljällä tai viidellä?

LibreOfficella:

	Alussa olevat luvut	neljällä jaollisten jakojäännös	viidellä jaollisten jakojäännös	20 jaollisten jakojäännös
Lukumäärä	900	225	180	45
	100	0	0	0
	101	1	1	1
	102	2	2	2
	103	3	3	3
	104	0	4	4
	105	1	0	5

Siis $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \ ja\ B)$

Nyt $P(A \text{ tai } B) = \frac{225}{900} + \frac{180}{900} - \frac{45}{900} = \frac{360}{900} = \frac{2}{5}$

PB10.6

Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kaksinumeroinen, positiivinen kokonaisluku on jaollinen kolmella tai neljällä? Sovella ratkaisussasi LibreOfficen Calccia.

LibreOfficen Calcilla:

B	C	D	E
Määrä	300	225	75
kolminumeroiset luvut	kolmella jaolliset	neljällä jaolliset	kahdellatoista jaolliset
100	1	0	4
101	2	1	5
102	0	2	6
103	1	3	7
104	2	0	8
105	0	1	9

Olkoon $N(A) = 300$ kolmella jaolliset luvut.

Olkoon $N(B) = 225$ neljällä jaolliset luvut.

Olkkoon $N(A \cap B) = 75$ kahdellatoista jaolliset lut.

Nyt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$\frac{300}{900} + \frac{225}{900} - \frac{75}{900} = \frac{450}{900} = 0,5$$

Vastaus: Satunnaisesti valittu positiivinen kolminumeroinen luku on jaollinen kolmella tai neljällä 50%:n todennäköisyydellä.

SB10.7

Kuinka monta kertaa pitää heittää painottamatonta arpakuutiota, jotta saataisiin todennäköisyydellä 0,85 ainakin yksi kolmella jaollinen luku. Kokeile laskea kolmella eri tavalla, esimerkin 4 mukaisesti.

Olkoon A="Ainakin yksi kolmella jaollinen luku", jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ ="Ei yhtään kolmella jaollista lukua.".

$P(\bar{A}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$ ja $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Siis $1 - \left(\frac{4}{6}\right)^n \geq 0,85$ Taulukoidaan:

Heittokerrat	komplementti.tn	1-(4/6)^n		p	q
1	0,666666666666667	0,333333333		0,333333333	0,66666666
2	0,444444444444444	0,555555556			
3	0,296296296296296	0,703703704			
4	0,197530864197531	0,802469136			
5	0,131687242798354	0,868312757			
6	0,087791495198903	0,912208505			
7	0,058527663465935	0,941472337			
8	0,039018442310623	0,960981558			
9	0,026012294873749	0,973987705			
10	0,017341529915833	0,98265847			
11	0,011561019943888	0,98843898			

Arpakuutiota on heitettävä ainakin viisi kertaa.

SB10.8

Tulitikkutehtaalla tulitikkujen laadunvalvoja havaitsi, että 2 % tulitikuista oli kelvottomia. Kuinka monta tulitikkua on otettava tulitikkulaatikosta, jotta saadaan ainakin yksi viallinen tulitikku yli 98 % todennäköisyydellä? Selvitä ratkaisu LibreOfficen Calcin avulla.

Olkoonn A="Kelvoton *tulitikku*", jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ ="*Ei yhtään kelvotonta tulitikkua*".

$P(\bar{A}) = \left(\frac{98}{100}\right)^n$ ja $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Siis $1 - 0,98^n \geq 0,98$

Taulukointi alussa:

Heittokerrat	komp. tn.	1-(0,98)^n
1	0,98	0,02
2	0,98	0,0396
3	0,98	0,058808
4	0,98	0,07763184
5	0,98	0,096079203
6	0,98	0,114157619
7	0,98	0,131874467
8	0,98	0,149236977
9	0,98	0,166252238

lopussa:

191	0,98	0,978904955
192	0,98	0,979326856
193	0,98	0,979740319
194	0,98	0,980145512
195	0,98	0,980542602

On siis otettava vähintään 194 tulitikkua.

SA10.9

Kyläkaupan kahdesta pysäköintipaikasta kumpikin on keskimäärin 40 minuuttia tunnista varattuna ja loput ajasta vapaana. Keskimäärin 32 minuuttia tunnista ovat molemmat pysäköintipaikat yhtaikaa varattuina. Kaupalle saapuu samalla hetkellä kaksi autoilijaa. Mikä on todennäköisyys, että molemmat pääsevät heti näihin pysäköintipaikkoihin? (K1998/5b)

Merkitään pysäköintipaikkoja kirjaimilla A ja B.

Käytetään komplementtitodennäköisyyttä hyväksi.

$P(A \text{ ja } B \text{ vapaa }) = 1 - P(A \text{ tai } B \text{ on varattu }) =$

Huomaa riippuvien tapausten yhteenlaskusääntö:

$1 - (P(A \text{ varattu }) + P(B \text{ varattu }) - P(A \text{ ja } B \text{ varattu })) =$

$1 - (\frac{40}{60} + \frac{40}{60} - \frac{32}{60}) =$

$\frac{12}{60} = 0,20$

Vastaus: Molemmat autot pääsevät parkkipaikoille 20 %:n todennäköisyydellä.

SB10.10

Eräällä paikkakunnalla sataa 60 prosentin todennäköisyydellä, jos edellisenä päivänä on satanut; poutasään todennäköisyys on tällöin 40 prosenttia. Jos taas edellisenä päivänä on ollut pouta, sateen todennäköisyys on vain 20 prosenttia ja poudan todennäköisyys vastaavasti 80 prosenttia. Millä todennäköisyydellä ylihuomenna sataa, kun tänään on pouta? (S2001/5)

Merkitään todennäköisyyksiä:

Poutapäivän jälkeen: seuraavana päivänä on pouta $p_1 = 0,8$ tai sadetta $q_1 = 0,2$.

Sadepäivän jälkeen: seuraavana päivänä on pouta $p_2 = 0,4$ tai sadetta $q_2 = 0,6$.

Siis ylihuomenna sataa todennäköisyydellä:

$P(A) = p_1 \cdot q_1 + q_1 \cdot q_2 = \ 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,28$.

Vastaus: Ylihuomenna sataa 28% todennäköisyydellä.

SB10.11

Leirikoulun hyväksi järjestetyissä arpajaisissa ilmoitettiin, että joka 20:s arpa voittaa. Kuinka monta arpaa on ostettava, jotta todennäköisyys ainakin yhteen voittoon olisi yli 50 %? (K2004/9) Kokeile hyödyntää LibreOfficen Calccia.

Merkitään $P(A) = \frac{1}{20}$, kun arpa voittaa.

Merkitään $P(\overline{A}) = \frac{19}{20}$, kun arpa ei voita.

Nyt $P(A) = 1 - (\frac{19}{20})^n > 0,5$

LibreOfficen Calcilla:

n	p
1	0,05
2	0,0975
3	0,142625
4	0,18549375
5	0,226219063
6	0,264908109
7	0,301662704
8	0,336579569
9	0,36975059
10	0,401263061
11	0,431199908
12	0,459639912
13	0,486657917
14	0,512325021
15	0,53670877
16	0,559873331
17	0,581879665
18	0,602785682
19	0,622646397

Vastaus: On siis ostettava vähintään 14 arpaa.

SB10.12

Henkilön työmatkalla on kolmet liikennevalot, jotka toimivat toisistaan riippumattomasti. Ne näyttävät henkilön kulkusuuntaan vihreätä valoa 30 %, 40 % ja 20 % ajasta. Laske todennäköisyys, että henkilö joutuu pysähtymään valoihin enintään kerran. (S2007/8)

Työmatkaalla olevien vihreiden valojen todennäköisyydet ovat seuraavat:

1. valot: $p_1 = 0,3$

2. valot: $p_2 = 0,4$

3. valot: $p_3 = 0,2$

Vastaavasti työmakalla joutuu pysähtymään todennäköisyyksillä:

1. valot: $q_1 = 0,7$

2. valot: $q_2 = 0,6$

3. valot: $q_3 = 0,8$

Todennäköisyys, että joutuu pysähtymään enintään kerran muodostuu kombinaatioista:

($p_1 p_2 p_3$, $q_1 p_2 p_3$, $p_1 q_2 p_3$, $p_1 p_2 q_3$)

Nyt $P(A) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,8 \quad = 0,212$

Vastaus: Työmatkalla joutuu enintään yksiin punaisiin valoihin on $21,2\%$

SB10.13

CD-levyllä on viisi kappaletta, ja henkilö kuuntelee levyn päivittäin yhden viikon aikana siten, että hän asettaa soittimen toistamaan kappaleet satunnaisessa järjestyksessä. Millä todennäköisyydellä kappaleet tulevat ainakin kerran kuunnelluiksi siinä järjestyksessä, jossa ne ovat levyllä? (K2008/5)

CD-levyllä olevat kappaleet voidaan asettaa järjestykseen $5! = 120$ eri tavalla. Oikean järjestyksen todennäköisyys on $p = \dfrac{1}{120}$ ja väärän järjestyksen $\overline{A} = q = \dfrac{119}{120}$.

Oikea järjestys tulee kuulutua ainakin kerran, kannattaa laskea hyväksikäyttäen komplementtitodennäköisyyttä.

$$P(A) = 1 - P(\ \overline{A}\ )^7 = 1 - (\frac{119}{120})^7 \approx 0,05689508.$$

Vastaus: Sama järjestys tulee kuunneltavaksi ainakin kerran todennäköisyydellä $5,7\%$.

SB10.14

Tehdas valmistaa hehkulamppuja siten, että kone A valmistaa 60 prosenttia, kone B 30 prosenttia ja kone C 10 prosenttia hehkulampuista. Koneen A viallisten hehkulamppujen määrä on 2 prosenttia, koneen B 3 prosenttia ja koneen C 4 prosenttia. a) Mikä on todennäköisyys, että tehtaan valmistama lamppu on viallinen? b) Tehtaan valmistama viallinen lamppu valitaan umpimähkään. Millä todennäköisyydellä se on koneen C valmistama? (K2009/6)

Olkoon tehtaan tuottamien lamppujen määrä $100a$. Nyt tehtävässä annettujen tietojen mukaisesti kone A valmistaa $60a$, kone B valmistaa $30a$ ja kone C valmistaa $10a$. Vastaavasti koneen A viallisten lamppujen määrä on 2% eli $60a \cdot 0,02 = 1,2a$, koneen B viallisten lamppujen määrä on 3% eli $30a \cdot 0,03 = 0,9a$ ja koneen C viallisten lamppujen määrä on 4% eli $10a \cdot 0,04 = 0,4a$. Viallisten lamppujen määrä on siis $1,2a + 0,9a + 0,4a = 2,5a$

a) Satunnaisesti valittu lamppu on viallinen todennäköisyydellä $P(A) = \dfrac{2,5a}{100a} \cdot 100 = 2,5\%$

b) Se, etä satunniasesti valittu viallinen lamppu on koneesta c, on: $P(C) = \dfrac{0,4a}{2,5a} \cdot 100 = 16\%$

SB10.15

Heitetään säännöllistä heksaedrin muotoista painottamatonta noppaa. Montako kertaa sitä on heitettävä, jotta saataisiin ainakin yksi kuutonen 80 % todennäköisyydellä? Selvitä tehtävä hyväksikäyttäen ohjelmaa LibreOfficen Calc.

Merkitään A="Ainakin yksi kuutonen", jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ ="Ei yhtään kuutosta".

$P(\bar{A}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ ja $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Siis $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \geq 0,80$ Tutkitaan probleemaa alla olevan taulukoinnin mukaan:

C11 =1-(B11)^A11

	A	B	C	D	E
1					
2	Heittokertojen lukumäärä n	komplementin todennäköisyys 5/6	1-(5/6)^n		
3	1	0,83333333333	0,1666666667		
4	2	0,83333333333	0,3055555556		
5	3	0,83333333333	0,4212962963		
6	4	0,83333333333	0,5177469136		
7	5	0,83333333333	0,598122428		
8	6	0,83333333333	0,6651020233		
9	7	0,83333333333	0,7209183528		
10	8	0,83333333333	0,7674319606		
11	9	0,83333333333	0,8061933005		
12	10	0,83333333333	0,8384944171		
13	11	0,83333333333	0,8654120143		
14	12	0,83333333333	0,8878433452		
15	13	0,83333333333	0,906536121		

Arpakuutiota on siis heitettävä vähintään 9 kertaa.

SB10.16

Arpajaisiin on hankittu 10000 arpaa, joiden joukossa on 100 voittonumeroa. Montako arpaa vähintään on nostettava, jotta todennäköisyys sille, että saataisi ainakin yksi voitto, olisi ≥ 0,5 ? (K1981/9b)

Merkitään A="Ainakin yksi voitto", jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ ="*Ei yhtään voittoa*".

$P(\bar{A}) = \left(\frac{99}{100}\right)^n$ ja $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Siis $1 - 0,99^n \geq 0,50$

$0,99^n \leq 0,50 \quad |lg$

$n \lg 0,99 \leq \lg 0,50$

$$n \geq \frac{\lg 0,5}{\lg 0,99} \approx 68,97$$

Vastaus: Pitää nostaa siis vähintään 69 arpaa.

SB10.17

Erään teollisuustuotteen laaduntarkkailussa löytyy viallisia kappaleita keskimäärin 3 %. Kuinka monta kappaletta on tutkittava, jotta todennäköisyys sille, että löytyy ainakin yksi viallinen kappale, olisi vähintään 0,90 ? (S1978/6a)

Merkitään A="Ainakin yksi viallinen", jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ ="*Ei yhtään viallista*".

$P(\bar{A}) = \left(\frac{97}{100}\right)^n$ ja $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Siis $1 - 0,97^n \geq 0,90$

$0,97^n \leq 0,1 \quad |lg$

$n \lg 0,97 \leq \lg 0,1$

$$n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,97} \approx 75,60$$

Vastaus: On tutkittava siis ainakin 76 kappaletta.