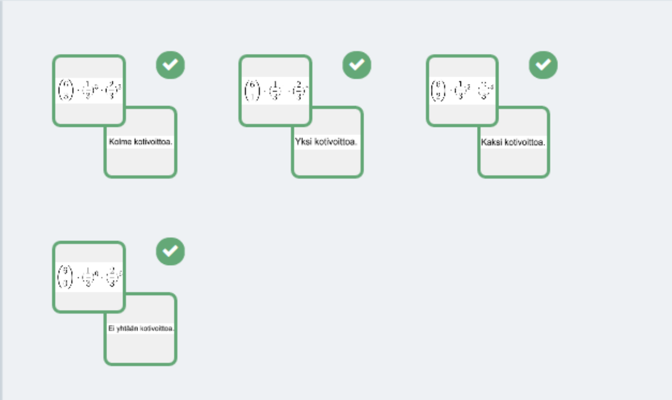
PA11.1

Vakioveikkauksen kuusi kohdetta

Tarkastellaan vakioveikkauksen (1X2) kuutta eri kohdetta. Lasketaan kotivoittojen, tasapelien tai vierasvoittojen lukumäärien todennäköisyyttä. Vedä vasemmalla puolella olevat kuvat oikealla puolella olevien oikeidan kuvien päälle.

$\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$ $\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$ $\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$

$\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6$



PA11.2

Suomalainen ampumahiihtäjä Kaisa Mäkäräinen saa ampumapaikalla ammuttua kaikki laikat alas todennäköisyydellä 1/3. Normaalimatkalla on neljä ammuntaa. Millä todennäköisyydellä Kaisa saa normaalimatkalla täsmälleen kahdella ampumakerralla kaikki laikat ammuttua alas?

Nyt siis $p=\frac{1}{3}$ ja $q=\frac{2}{3}$, jolloin

$P(A) = P(ppqq)+P(pqpq)+P(pqqp)+P(pqqp)+P(qpqp)+P(qqpp)$ =

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{24}{81}$$

$= \frac{8}{27} = 0{,}2963 \approx 30\%$

Tämän voi ratkaista myös Binomitodennäköisyydellä.

$$P(A)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=0,2963$$

PB11.3

On havaittu, että eräällä kalaisella järvellä saa verkkokalastuksella siian 25 %:n todennäköisyydellä. Verkkokalastuksella tarkoitetaan, että laitetaan pyytämään 30 metriä pitkä ja silmäkooltaan 50 mm oleva verkko yön yli järveen. Millä todennäköisyydellä kolmella verkolla saadaan täsmälleen yksi siika?

Nyt siis $p = \frac{1}{4}$ ja $q = \frac{3}{4}$, jolloin $P(A) = P(pqq) + P(qpq) + P(qqp)$

$$P(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{64} = 0{,}421875 \approx 42\%$$

Tai binomitodennäköisyyden kaavalla:

$$P(A) = \binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,421875$$

Vastaus: Kolmella verkolla saadaan täsmälleen yksi siika noin 42 %:n todennäköisyydellä.

PB11.4

Kevään kukkasipulipakkauksen tuoteselosteessa ilmoitetaan, että 76% kukkasipuleista itää.

Millä todennäköisyydellä neljä tai viisi kukkasipulia viidestä itää?

kun k=4 $P_4 = \binom{5}{4}\cdot(0,76)^4\,(0,24)^1 \approx 0,40035$

kun k=5 $P_5 = \binom{5}{5}\cdot(0,76)^5\,(0,24)^0 \approx 0,25355$

P(”neljä tai viisi kukkasipulia viidestä itää”)=

$$0,40035 + 0,25355 \approx 0,654$$

Vastaus: Neljä tai viisi kukkasipulia viidestä itää noin 65 %:n todennäköisyydellä.

PB11.5

Eräällä koululla riehuu norovirus. Sairaanhoitaja laski, että peräti 62,64 % opiskelijaa on saanut tartunnan, Jos satunnaisotannalla valitaan kuusi opiskelijaa, niin millä todennäköisyydellä ainakin viisi heistä on saanut tartunnan?

Nyt p= 0,6264 ja q= 1-p=0,3736, n=6 ja k=5,6

$$P_5 = \binom{6}{5}\cdot(0,6264)^5\,(0,3736)^1 \approx 0,2162$$

$$P_6 = \binom{6}{6}\cdot(0,6264)^6\,(0,3736)^0 \approx 0,0604$$

$$P_5 + P_6 \approx 0,2766$$

Vastaus: Ainakin viisi opiskelijaa on saanut tartunnan noin 28 %:n todennnäköisyydellä.

PB11.6

Kokeessa on 10 tehtävää, joissa valitaan kahdesta vaihtoehdosta oikea vastaus. Oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen ja väärästä vastauksesta menettää yhden pisteen. Huonosti valmistautunut opiskelija valitsee kaikki vastaukset arvaamalla. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän saa kokeesta vähintään 8 pistettä? (k2015/10)

Tuloksen 10 pistettä voi saada vain arvaamalla kaikki oikein, eli $P(10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Tulos 9 pistettä on mahdoton, koska yksi väärä arvaus antaa $9 - 1 = 8$ pistettä. Toisin sanoen $P(9) = 0$

Tuloksessa 8 pistettä, jokin tehtävä 10:stä on väärä. Binomitodennäköisyyden mukaisesti $P(8) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ Nyt $P(8) + P(9) + P(10) = 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$ $0,0107\ldots$ eli noin 1%.

SB11.7

Jääkiekko-ottelun yhteydessä myytiin kannatusyhdistyksen arpoja. Markkinoinnissa ilmoitettiin, että joka 50 arpa voittaa. Jos satunnainen arpojen ostaja ostaa 6 arpaa, niin millä todennäköisyydellä täsmälleen yksi arpa voittaa? Jos satunnainen arpojen ostaja ostaa 6 arpaa, niin millä todennäköisyydellä ainakin yksi arpa voittaa?

$$P_1 = \binom{6}{1} \cdot (0,02)^1 (0,98)^5 \approx 0,1085$$

Tapahtuman ”ainakin yksi arpa voittaa” komplementti on ”yksikään arpa ei voita”, joten

$$P_0 = \binom{6}{0} \cdot (0,02)^0 (0,98)^6 \approx 0,8858$$

ja $P_1 - P_6 =$ $1 - 0,8858 = 0,1142 \approx 11,4\,\%$

Ainakin yksi arpa voittaa noin 11 %:n todennäköisyydellä.

SB11.8

Tavaraerässä on 2 % virheellisiä yksilöitä. Millä todennäköisyydellä umpimähkään otetussa 20 kappaleen näytteessä on enintään kaksi virheellistä yksilöä? (S1993/6)

Nyt $n = 20$, $k = 0, 1, 2$, $p = 0,02$ ja $q = 0,98$

Olkoon

- $A =$ Haluttu todennäköisyys
- $B =$ Ei yhtään virheellistä
- $C =$ Yksi virheellistä
- $D =$ Kaksi virheellistä

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) =$$
$$\binom{20}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,02^1 \cdot 0,98^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{18} \quad \approx 0,99$$

Vastaus: Siis noin 99%:n todennäköisyydellä.

SB11.9

Kukansiemeniä sisältävän säkin kyljessä kerrotaan, että siementen itämistodennäköisyys on 95 % ja että 5 % säkin sisällöstä on samannäköisiä rikkaruohon siemeniä. Säkin siemenet jaetaan kahdenkymmenen siemenen pusseihin. Millä todennäköisyydellä puutarhuri, joka kylvää tällaisen pussillisen siemeniä, saa vähintään 19 haluamaansa kukantainta? Millä todennäköisyydellä hän kylvää vähintään yhden rikkaruohonsiemenen? (S1999/7a)

Nyt $n = 20$, $k = 19, 20$, $p = 0,95 \cdot 0,95 = \dfrac{361}{400}$ ja $q = \dfrac{39}{400}$

Siis: $P(A) = \binom{20}{19} \cdot \dfrac{361}{400}^{19} \cdot \dfrac{39}{400}^{1} + \binom{20}{20} \cdot \dfrac{361}{400}^{20} \cdot \dfrac{39}{400}^{0}$

$\approx 0,4062 \approx 40,6\%$

Vähintään yksi rikkaruohonsiemenen komplementti on ei yhtään rikkaruohon siementä.

Siis: $P(A) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,6425$

Vastaus: Puutarhuri saa vähintään 19 haluamaansa kukantainta $40,6\%$:n todennäköisyydellä ja hän kylvää vähintään yhdenrikkaruohonsiemenen $64,3\%$:n todennäköisyydellä.

SB11.10

Oletetaan, että eräässä kunnassa syntyy ensi vuonna 60 lasta. Lasten sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia, ja pojan syntymistodennäköisyys on 0,513. Mitä jakaumaa tyttöjen ja poikien lukumäärät noudattavat? Mikä on poikien ja mikä tyttöjen lukumäärän odotusarvo? Millä todennäköisyydellä syntyy täsmälleen yhtä monta tyttöä ja poikaa? (K1999/5b)

Nyt $n = 60$, $k = 30$, $p = 0,513$ ja $q = 0,487$

Binominjakauman odotusarvo on $\mu = np$

Pojat $\mu_b = np = 60 \cdot 0,513 \approx 30,8$

Tytöt $\mu_g = nq = 60 \cdot 0,487 \approx 29,2$

Olkoon

- $A =$ Haluttu todennäköisyys, että syntyy yhtä monta tyttöä ja poikaa

$$P(A) = \binom{60}{30} \cdot 0,513^{30} \cdot 0,487^{30} \approx 0,101$$

Vastaus: Poikia ja tyttöjä syntyy yhtä monta noin $10,1\%$:n todennäköisyydellä. Jakaumat ovat tytöt: $Bin(60; 0,487)$ ja pojat: $Bin(60; 0,513)$. Tyttöjen odotusarvo on 29,2 ja poikien 30,8.

SB11.11

Eräässä puhelimen latausjohtojen valmistuserässä on 0,2 % viallisia.

a) Mikä on todennäköisyys sille, että 500 latausjohdon valmistuserässä on ainakin kaksi viallista latausjohtoa?

b) Montako latausjohtoa on testattava, jotta löydettäisiin ainakin yksi virheellinen latausjohto 96 %:n todennäköisyydellä?

Kokeile hyödyntää LibreOfficen Calccia jälkimmäisen tehtävän ratkaisussa.

a)

Merkitään A="*Ainakin kaksi viallista latausjohtoa*", jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ ="*Korkeintaan yksi viallinen latausjohto*".

Siis $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$$P(A) = 1 - \left\{ \binom{500}{0} 0,998^{500} \cdot 0,002^{0} + \binom{500}{1} 0,998^{499} \cdot 0,002^{1} \right\} \approx 0,5028$$

b)

Olkoon A="*Yksi viallinen latausjohto*", jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ = "*Ei yhtään viallista latausjohtoa.*".

$P(\bar{A}) = \left(\frac{998}{1000}\right)^n$ ja $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Siis $1 - 0,998^n \geq 0,96$ Tutkitaan taulukoinnilla:

lukumäärä	komplementti tn.	1-q^n
1	0,998	0,002
2	0,998	0,003996
3	0,998	0,005988008
4	0,998	0,007976032
5	0,998	0,00996008
1603	0,998	0,959611504
1604	0,998	0,959692281
1605	0,998	0,959772896
1606	0,998	0,95985335
1607	0,998	0,959933644
1608	0,998	0,960013776
1609	0,998	0,960093749
1610	0,998	0,960173561
1611	0,998	0,960253214

Täytyy siis tutkia ainakin 1608 latausjohtoa.

SB11.12

Koripallo-ottelun peliajan päättyessä Espoon Honka johtaa ottelua yhdellä pisteellä. Joensuun Kataja on saanut peliajan päättyessä vielä kolme vapaaheittoa, joista kustakin onnistuneesta heitosta saa yhden pisteen. Mikä pitää olla vapaaheiton onnistumistodennäköisyys, jotta Joensuun Kattaja voittaisi ottelun vapaaheittojen jälkeen vähintään 65 %:n todennäköisyydellä?

Käytetään binomitodennäköisyyttä:

Joensuun Kataja voittaa, jos kaksi vapaaheittoa onnistuu kolmesta tai kolme vapaaheittoa onnistuu kolmesta:

$$P(A) = \binom{3}{2} \cdot (p)^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} \cdot (p)^3 (1-p)^0 =$$

Käytetään LibreOfficen taulukkolaskentaa:

n	p	P(2/3)	P(3/3)	yhteensä
1	0,01	0,000297	1E-06	0,000298
2	0,02	0,001176	8E-06	0,001184
3	0,03	0,002619	2,7E-05	0,002646
4	0,04	0,004608	6,4E-05	0,004672
5	0,05	0,007125	0,000125	0,00725
6	0,06	0,010152	0,000216	0,010368
58	0,58	0,423864	0,195112	0,618976
59	0,59	0,428163	0,205379	0,633542
60	0,6	0,432	0,216	0,648
61	0,61	0,435357	0,226981	0,662338
62	0,62	0,438216	0,238328	0,676544
63	0,63	0,440559	0,250047	0,690606

Vastaus:

Havaitaan, että 65 %n todennäköisyys saavutetaan, kun heiton onnistumistodennäköisyys on vähintään 61 %.

SB11.13

Noppaa heitetään viisi kertaa. Millä todennäköisyydellä ensimmäisen heiton silmäluku esiintyy täsmälleen kahdesti ? (S1979/7b)

Tämä tarkoittaa, että neljällä viimeisellä heittokerralla saadaan täsmälleen kaksi kertaa sama nopan silmäluku, joka saa ensimmäisellä heitolla. Ensimmäisen heiton todennäköisyys on siis 100 %.

Nyt $P_2 = \binom{4}{2} \cdot 0,44^2 \cdot 0,56^2 \approx 0,36427$

Vastaus: Ensimmäisen heiton silmäluku esiintyy täsmälleen kahdesti noin 36,4 %:n todennäköisyydellä.