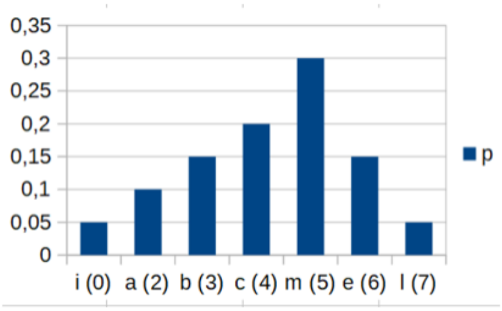
PB12.2

Erään ylioppilastutkintokerran pitkän matematiikan arvosanojen todennäköisyysjakauma oli seuraavanlainen:



Kuvassa on sulkuihin merkitty arvosanojen puoltoäänet. Laske jakauman puoltoäänien odotusarvo $E\underline{x}$ ja keskihajonta $D\underline{x}$.

	Arvosana	p	x	x- ka	(x- ka)^2	p*(x- ka)^2
i	0	0,05	0	-0,05	0,0025	0,000125
a	2	0,1	0,2	0,1	0,01	0,001
b	3	0,15	0,45	0,3	0,09	0,0135
c	4	0,2	0,8	0,6	0,36	0,072
m	5	0,3	1,5	1,2	1,44	0,432
e	6	0,15	0,9	0,75	0,5625	0,084375
l	7	0,05	0,35	0,3	0,09	0,0045
	Summa	**1**	**4,2**			**0,6075**
			odotusarvo	**4,2**		
			keskihajonta	**0,779422863**		

Odotusarvo $E\underline{x} = 4,2$ ja keskihajonta $D\underline{x} \approx 0,78$.

PB12.3

Yhtenä kesänä Kaisa tilastoi havaitsi, että vuorokauden aikana sääskenpyydykseen oli mennyt 6, 7, 8 tai 9 hankisääskeä todennäköisyyksillä: 0,15 ; 0,25 ; 0,45 ; 0,15. Laske hankisääsken odotusarvo ja keskihajonta.

Odotusarvo lasketaan seuraavasti:

$$E\underline{x} = \mu = \sum_{k=1}^{4} x_k p_k = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 6 \cdot 0,15 + 7 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,45 + 9 \cdot 0,15 = 7,6.$$

Keskihajonta lasketaan seuraavasti:

$$D\underline{x} = \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} p_k \left(x_k - \mu\right)^2} = \sqrt{0,15\,(6-7,6)^2 + 0,25\,(7-7,6)^2 + 0,45\,(8-7,6)^2 + 0,15\,(9-7,6)^2}$$

=

$$\sqrt{0,84} \approx 0,92$$

PB12.4

Erään urheiluseuran kannatusyhdistys järjesti arpajaiset. Arpoja painettiin 500 kappaletta ja yhden arvan hinta oli 5 €. Voittoarpoja oli seuraavasti: 500 € (3 kpl), 200 € (5 kpl), 100 € (10 kpl). Jos yksi arvan ostaja ostaa yhden arvan, mikä on odotusarvo ja keskihajonta?

Taulukoidaan voittojen todennäköisyydet:

Voitto	1000€	500€	100€	0€
p	0,003	0,005	0,015	0,977

Odotusarvo lasketaan seuraavasti:

$$E\underline{x} = \mu = \sum_{k=1}^{4} x_k p_k = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$
$$= 1000 \cdot 0,003 + 500 \cdot 0,005 + 100 \cdot 0,015 + 0 \cdot 0,977 - 10 = -3$$

Siis -3€. Huomaa, että arpa pitää ostaa 10€:lla.

Tai:

Lopputulos	990 €	490 €	90 €	-10 €
p	0,003	0,005	0,015	0,977

Lopputulokseen otetaan huomioon 10€ panos.

Nyt $E\underline{x} =$ $990 \cdot 0,003 + 490 \cdot 0,005 + 90 \cdot 0,015 + (-10) \cdot 0,977 = -3$ Siis -3€.

Keskihajonta lasketaan seuraavasti:

$$D\underline{x} = \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} p_k \left(x_k - \mu\right)^2} =$$
$$\sqrt{0,003\,(1000+3)^2 + 0,005\,(500+3)^2 + 0,015\,(100+3)^2 + 0,977\,(0+3)^2} \approx 66,72\text{ €}$$

PB12.5

Oheisesa taulukossa on ote Tilastokeskuksen raportista:Asuntokunnat koon mukaan ja asuntokuntien keskikoko 1960–2016 (https://www.stat.fi/til/asas/2016/asas_2016_2017-05-22_tau_001_fi.html)

	Asuntokuntia yhteensä	1 henkilö	2 henkilöä	3 henkilöä	4+ henkilöä	Asuntokunnan keskikoko
1960	1204385	188995	245921	229824	539645	3,34
2016	2654657	1131424	880188	284108	358937	2,03

Määritä kuvan perusteella asuinkunnan koon odotusarvo ja keskihajonta vuosina 1960 ja 2016. Merkitse asuntokunnan kokoja luvuilla 1-4. Kumpana vuonna keskihajonta on suurempi?

	Asuntokuntia yhteensä	1 henkilö	2 henkilöä	3 henkilöä	4+ henkilöä	Asuntokunnan keskikoko
		1	2	3	4	
1960	1204385	188995	245921	229824	539645	3,34
	X-ka	-2,34	-1,34	-0,34	0,66	Summa
	(x-ka)^2	5,4756	1,7956	0,1156	0,4356	7,8224
					keskihajonta	2,796855377
2016	2654657	1131424	880188	284108	358937	2,03
	X-ka	-1,03	-0,03	0,97	1,97	Summa
	(x-ka)^2	1,0609	0,0009	0,9409	3,8809	5,8836
					keskihajonta	2,4256133245

Vuonna 1960 odotusarvo voidaan lukea suoraan taulukosta, eli $E\underline{x} \approx 3,34$ ja keskihajonta saadaan laskemalla $D\underline{x} \approx 2,80$. Vuonna 2016 odotusarvo voidaan lukea suoraan taulukosta, eli $E\underline{x} \approx 2,03$ ja keskihajonta saadaan laskemalla $D\underline{x} \approx 2,43$.

PB12.6

Hedelmiä on kupissa: 3 omenaa ja 4 appelsiinia. Valitaan kupista 3 hedelmää.

a) Määritä satunnaismuuttujan X valittujen omenien lukumäärän jakauma.

b) Laske todennäköisyys, että valittujen hedelmien joukossa on ainakin kaksi omenaa.

a)

Olkoon $P(A) = \dfrac{\binom{3}{a}\cdot\binom{4}{b}}{\binom{7}{3}} =$, missä a+b=3, tällöin:

1. Kun $a = 0$ ja $b = 3$, niin $P(A_1) = \dfrac{\binom{3}{0}\cdot\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{1\cdot 4}{35} = \dfrac{4}{35}$

2. Kun $a = 1$ ja $b = 2$, niin $P(A_2) = \dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{3\cdot 6}{35} = \dfrac{18}{35}$

3. Kun 4a = 2 jab = 1\$, niin $P(A_3) = \dfrac{\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{3\cdot 4}{35} = \dfrac{12}{35}$

4. Kun $a = 3$ ja 4b = 0\$, niin $P(A_4) = \dfrac{\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{1\cdot 1}{35} = \dfrac{1}{35}$

b)

a-kohdan mukaisesti $P(A) = P(A_3) + P(A_4) = \dfrac{12}{35} + \dfrac{1}{35} = \dfrac{13}{35}$

SB12.7

Huoneessa on 4 naista ja 5 miestä. Huoneesta kutsutaan umpimähkään 4 henkilöä. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ ilmaisee, kuinka monta kutsutuista on miehiä. Laske todennäköisyydet $P(\underline{x}=0)$, $P(\underline{x}=1)$, ... , $P(\underline{x}=4)$ ja $\underline{x}$:n odotusarvo. (K1980/9B)

Nyt tarkastellaan kaavaa

$$P(\underline{x}=k)=\frac{\binom{5}{k}\cdot\binom{4}{4-k}}{\binom{9}{4}}=$$

1. Kun miehiä = 0 ja naisia = 4, $P(\underline{x}=0)=\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}}=\frac{1\cdot 1}{126}=\frac{1}{126}$
2. Kun miehiä = 1 ja naisia = 3, $P(\underline{x}=1)=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{3}}{\binom{9}{4}}=\frac{5\cdot 4}{126}=\frac{20}{126}$
3. Kun miehiä = 2 ja naisia = 2, $P(\underline{x}=2)=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{10\cdot 6}{126}=\frac{60}{126}$
4. Kun miehiä = 3 ja naisia = 1, $P(\underline{x}=3)=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}}=\frac{10\cdot 4}{126}=\frac{40}{126}$
5. Kun miehiä = 4 ja naisia = 0, $P(\underline{x}=4)=\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{9}{4}}=\frac{5\cdot 1}{126}=\frac{5}{126}$

Odotusarvo: $\mu=0\cdot\frac{1}{126}+1\cdot\frac{20}{126}+2\cdot\frac{60}{126}+3\cdot\frac{40}{126}+4\cdot\frac{5}{126}=\frac{280}{126}\approx 2,22$

SB12.8

Heitetään arpakuutiota ja tetraedrin muotoista noppaa. Laske saadun pisteluvun odotusarvo ja keskihajonta.

Noppa2									
4	5	6	7	8	9	10			
3	4	5	6	7	8	9			
2	3	4	5	6	7	8			
1	2	3	4	5	6	7			
Noppa1	1	2	3	4	5	6			
Summa			**TN**				$(x_k-\mu)$	$(x_k-\mu)^2$	$p_k\left(x_k-\mu\right)^2$
2	1		0,04		0,08		-4	16	0,66666667
3	2		0,08		0,25		-3	9	0,75
4	3		0,13		0,5		-2	4	0,5
5	4		0,17		0,83		-1	1	0,16666667
6	4		0,17		1		0	0	0
7	4		0,17		1,17		1	1	0,16666667
8	3		0,13		1		2	4	0,5
9	2		0,08		0,75		3	9	0,75
10	1		0,04		0,42		4	16	0,66666667
	24		1	μ	6				
								σ^2	4,16666667
								σ	2,04

Vastaus: Odotusarvo on 6 ja kewskihajonta on noin 2,04.

SB12.9

Kuinka monta kertaa painottamatonta noppaa on heitettävä, jotta saataisiin yksi ykkönen vähintään 99 %:n todennäköisyydellä? Tee tämä tehtävä taulukkolaskentaohjelma. Sovella taulukkolaskentaohjelmaa ratkaisussa. Onko tämä mahdollista ratkaista myös GeoGebralla?

LibreOfficella:

Merkitään A=”ainakin yksi ykkönen”, jolloin A:n komplementti $\bar{A}$ = ”ei yhtään ykköstä”.

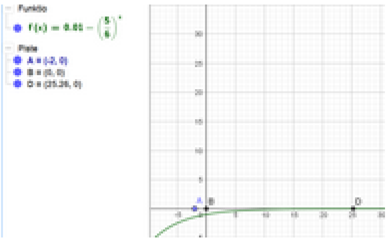
$P(\bar{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ ja $P(A)=1-P(\bar{A})$. Siis $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99$ Tutkitaan probleemaa alla olevan taulukoinnin mukaan:

	A	B	C
1			
2	Heittokertojen lukumäärä n	komplementin todennäköisyys 5/6	1-(5/6)^n
3	1	0,8333333333	0,1666666667
4	2	0,8333333333	0,3055555556
5	3	0,8333333333	0,4212962963
6	4	0,8333333333	0,5177469136
7	5	0,8333333333	0,598122428
8	6	0,8333333333	0,6651020233
9	7	0,8333333333	0,7209183528
10	8	0,8333333333	0,7674319606
11	9	0,8333333333	0,8061933005
12	10	0,8333333333	0,8384944171
13	11	0,8333333333	0,8654120143
14	12	0,8333333333	0,8878433452
15	13	0,8333333333	0,906536121
16	14	0,8333333333	0,9221134342
17	15	0,8333333333	0,9350945285
18	16	0,8333333333	0,9459121071
19	17	0,8333333333	0,9549267559
20	18	0,8333333333	0,9624389632
21	19	0,8333333333	0,968699136
22	20	0,8333333333	0,9739159467
23	21	0,8333333333	0,9782632889
24	22	0,8333333333	0,9818860741
25	23	0,8333333333	0,9849050617
26	24	0,8333333333	0,9874208848
27	25	0,8333333333	0,989517404
28	26	0,8333333333	0,9912645033
29	27	0,8333333333	0,9927204194
30	28	0,8333333333	0,9939336829
31	29	0,8333333333	0,9949447357

Voimme helposti havaita, että n:n arvosta 26 lähtien (keltaisella) epäyhtälö pitää paikkansa.

GeoGebralla:

Ratkaisussa syötetään tehtävässä annettu funktio ja piirretään x-akselin päälle suora. Lopuksi toisesta vasemmalla olevasta komentopainikevalikosta valitaan leikkauspiste toiminto ja saadaan pisteen D koordinaatit. Seuraava kuva 9 mallintaa tilannetta.



Kuva 9. Harjoituksen ratkaisu GeoGebralla.

SB12.10

Hilkka totesi, että viidestä erään tulppanilajikkeen sipuleista itää viikon sisällä korkeintaan kaksi sipulia 20 % todennäköisyydellä. Mikä on tällaisen tulppaanilajikkeen itämistodennäköisyys viikon sisällä?

Merkitään k=0 tarkoitta 0 sipulia itää, k=1 tarkoittaa 1 sipuli itää ja k=2 tarkoittaa 2 sipulia itää.

1. Kun k=0 $P_0 = \binom{5}{0} \cdot (p)^0 (1-p)^5$
2. Kun k=1 $P_1 = \binom{5}{1} \cdot (p)^1 (1-p)^4$

Taulukossa

n	p	K=0	K=1	K=2	Summa
1	0,01	0,95099005	0,048029801	0,000970299	0,999990149
2	0,02	0,903920797	0,092236816	0,003764768	0,999922381
3	0,03	0,858734026	0,132793922	0,008214057	0,999742004
4	0,04	0,815372698	0,169869312	0,014155776	0,999397786
5	0,05	0,773780938	0,203626563	0,021434375	0,998841875
6	0,06	0,733904022	0,234224688	0,029901024	0,998029734
7	0,07	0,695688369	0,261818204	0,039413493	0,996920066
8	0,08	0,659081523	0,286557184	0,049836032	0,995474739

63	0,63	0,006934396	0,059036072	0,201041757	0,267012224
64	0,64	0,006046618	0,053747712	0,191102976	0,250897306
65	0,65	0,005252188	0,048770313	0,181146875	0,235169375
66	0,66	0,004543542	0,044099088	0,171208224	0,219850854
67	0,67	0,003913539	0,039728354	0,161321193	0,204963086
68	0,68	0,003355443	0,035651584	0,151519232	0,190526259
69	0,69	0,002862915	0,031861475	0,141834951	0,176559341
70	0,7	0,00243	0,02835	0,1323	0,16308
71	0,71	0,002051115	0,025108476	0,122944949	0,150104539
72	0,72	0,001721037	0,022127616	0,113799168	0,137647821
73	0,73	0,001434891	0,019397597	0,104890707	0,125723194
74	0,74	0,001188138	0,016008112	0,096246176	0,114342426

Vastaus: p:n arvosta 68 % ylöspäin viidestä siemenestä itää korkeintaan kaksi siementä 20 % todennäköisyydellä.

SB12.11

Heitettäessä kahta noppaa silmälukujen neliöiden summa s on satunnaismuuttuja. Määritä s:n odotusarvo. (K1989/6a)

Noppa2	Noppa2 neliö						
6	36	37	40	45	52	61	72
5	25	26	29	34	41	50	61
4	16	17	20	25	32	41	52
3	9	10	13	18	25	34	45
2	4	5	8	13	20	29	40
1	1	2	5	10	17	26	37
	Noppa1 neliö	1	4	9	16	25	36
	Noppa1	1	2	3	4	5	6
keskiarvo	**30,33333333**						
Neliöitten summa	**1092**						

Kunkin tapauksen todennäköisyys on $\frac{1}{36}$.

Nyt odotusarvo saadaan laskettua: $E\underline{x} = \frac{1}{36} \cdot 1092 = 30\frac{1}{3} \approx 30,3$

SB12.12

Kahta noppaa heitettäessä saadut pisteluvut olkoot x ja y. Määritä satunnaismuuttujan Ix - yl todennäköisyysjakautuma ja odotusarvo (keskiarvo) (K1977/7b)

Taulukossa lasketaan erotukset kaavalla: ” =ITSEISARVO(A9-D10)”

Noppa2						
6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
Noppa1	1	2	3	4	5	6

Erotukset	f	xi*f
0	6	0
1	10	10
2	8	16
3	6	18
4	4	16
5	2	10
summa	36	70
	keskiarvo	1,944444444