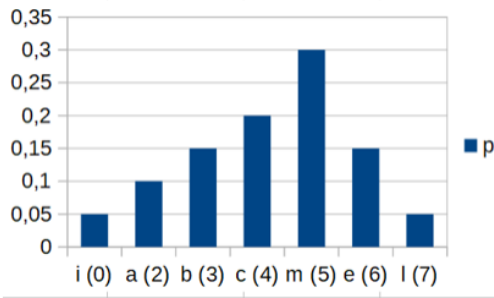


PB12.2

Erään ylioppilastutkintokerran pitkän matematiikan arvosanojen todennäköisyysjakauma oli seuraavanlainen:



Kuvassa on sulkuihin merkitty arvosanojen puoltoäänät. Laske jakauman puoltoäänien odotusarvo $E\bar{x}$ ja keskihajonta $D\bar{x}$.

Arvosana	p	x	x-ka	(x-ka) ²	p*(x-ka) ²	
i	0	0,05	0	-0,05	0,0025	0,000125
a	2	0,1	0,2	0,1	0,01	0,001
b	3	0,15	0,45	0,3	0,09	0,0135
c	4	0,2	0,8	0,6	0,36	0,072
m	5	0,3	1,5	1,2	1,44	0,432
e	6	0,15	0,9	0,75	0,5625	0,084375
l	7	0,05	0,35	0,3	0,09	0,0045
Summa	1	4,2			0,6075	
		odotusarvo	4,2			
		keskihajonta	0,779422863			

Odotusarvo $E\bar{x} = 4,2$ ja keskihajonta $D\bar{x} \approx 0,78$.

PB12.3

Yhtenä kesänä Kaisa tilastoi havaitsi, että vuorokauden aikana sääskenpyydykseen oli mennyt 6, 7, 8 tai 9 hankisääskeä todennäköisyyksillä: 0,15 ; 0,25 ; 0,45 ; 0,15. Laske hankisääsken odotusarvo ja keskihajonta.

Odotusarvo lasketaan seuraavasti:

$$E\bar{x} = \mu = \sum_{k=1}^4 x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 6 \cdot 0,15 + 7 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,45 + 9 \cdot 0,15 = 7,6.$$

Keskihajonta lasketaan seuraavasti:

$$D\bar{x} = \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^4 p_k (x_k - \mu)^2} = \sqrt{0,15 (6 - 7,6)^2 + 0,25 (7 - 7,6)^2 + 0,45 (8 - 7,6)^2 + 0,15 (9 - 7,6)^2}$$

=

$$\sqrt{0,84} \approx 0,92$$

PB12.4

Erään urheiluseuran kannatusyhdistys järjesti arpajaiset. Arpoja painettiin 500 kappaletta ja yhden arvan hinta oli 5 €. Voittoarpoja oli seuraavasti: 500 € (3 kpl), 200 € (5 kpl), 100 € (10 kpl). Jos yksi arvan ostaja ostaa yhden arvan, mikä on odotusarvo ja keskihajonta?

Pitkä matematiikka, Maa10, Ratkaisut Luku 12

Taulukoidaan voittojen todennäköisyydet:

Voitto	1000€	500€	100€	0€
p	0,003	0,005	0,015	0,977

Odotusarvo lasketaan seuraavasti:

$$E\bar{x} = \mu = \sum_{k=1}^4 x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$
$$= 1000 \cdot 0,003 + 500 \cdot 0,005 + 100 \cdot 0,015 + 0 \cdot 0,977 - 10 = -3$$

Siis -3€. Huomaa, että arpa pitää ostaa 10€:lla.

Tai:

Lopputulokset	990 €	490 €	90 €	-10 €
p	0,003	0,005	0,015	0,977

Lopputulokseen otetaan huomioon 10€ panos.

$$\text{Nyt } E\bar{x} = 990 \cdot 0,003 + 490 \cdot 0,005 + 90 \cdot 0,015 + (-10) \cdot 0,977 = -3 \quad \text{Siis -3€.}$$

Keskihajonta lasketaan seuraavasti:

$$D\bar{x} = \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^4 p_k (x_k - \mu)^2} =$$
$$\sqrt{0,003 (1000 + 3)^2 + 0,005 (500 + 3)^2 + 0,015 (100 + 3)^2 + 0,977 (0 + 3)^2} \approx 66,72 \text{ €}$$

PB12.5



Oheisessa taulukossa on ote Tilastokeskuksen raportista: Asuntokunnat koon mukaan ja asuntokuntien keskikoko 1960–2016 (https://www.stat.fi/til/asas/2016/asas_2016_2017-05-22_tau_001_fi.html)

	Asuntokuntia yhteensä	1 henkilö	2 henkilöä	3 henkilöä	4+ henkilöä	Asuntokunnan keskikoko
1960	1204385	188995	245921	229824	539645	3,34
2016	2654657	1131424	880188	284108	358937	2,03

Määritä kuvan perusteella asuinkunnan koon odotusarvo ja keskihajonta vuosina 1960 ja 2016. Merkitse asuntokunnan kokoja luvuilla 1-4. Kumpana vuonna keskihajonta on suurempi?

Pitkä matematiikka, Maa10, Ratkaisut Luku 12

	Asutokuntia yhteensä	1 henkilö	2 henkilöä	3 henkilöä	4+ henkilöä	Asutokunnan keskipöytä
		1	2	3	4	
1960	1204385	188995	245921	229824	539645	3,34
X-ka	-2,34	-1,34	-0,34	0,66	Summa	
(x-ka) ²	5,4756	1,7956	0,1156	0,4356	7,8224	
				keskihajonta	2,796855377	
2016	2654657	1131424	880188	284108	358937	2,03
X-ka	-1,03	-0,03	0,97	1,97	Summa	
(x-ka) ²	1,0609	0,0009	0,9409	3,8809	5,8836	
				keskihajonta	2,4256133245	

Vuonna 1960 odotusarvo voidaan lukea suoraan taulukosta, eli $E\bar{x} \approx 3,34$ ja keskihajonta saadaan laskemalla $D\bar{x} \approx 2,80$. Vuonna 2016 odotusarvo voidaan lukea suoraan taulukosta, eli $E\bar{x} \approx 2,03$ ja keskihajonta saadaan laskemalla $D\bar{x} \approx 2,43$.

PB12.6

Hedelmiä on kupissa: 3 omenaa ja 4 appelsiinia. Valitaan kupista 3 hedelmää.

a) Määritä satunnaismuuttujan X valittujen omenien lukumäärän jakauma.

b) Laske todennäköisyys, että valittujen hedelmien joukossa on ainakin kaksi omenaa.

a)

$$P(A) = \frac{\binom{3}{a} \cdot \binom{4}{b}}{\binom{7}{3}},$$

Olkoon missä $a+b=3$, tällöin:

$$1. \text{ Kun } a = 0 \text{ ja } b = 3, \text{ niin } P(A_1) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 \cdot 4}{35} = \frac{4}{35}$$

$$2. \text{ Kun } a = 1 \text{ ja } b = 2, \text{ niin } P(A_2) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 6}{35} = \frac{18}{35}$$

$$3. \text{ Kun } a = 2 \text{ ja } b = 1, \text{ niin } P(A_3) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 4}{35} = \frac{12}{35}$$

$$4. \text{ Kun } a = 3 \text{ ja } b = 0, \text{ niin } P(A_4) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 \cdot 1}{35} = \frac{1}{35}$$

b)

$$\text{a-kohdan mukaisesti } P(A) = P(A_3) + P(A_4) = \frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{13}{35}$$

SB12.7

Huoneessa on 4 naista ja 5 miestä. Huoneesta kutsutaan umpimähkään 4 henkilöä. Satunnaismuuttuja x ilmaisee, kuinka monta kutsutuista on miehiä. Laske todennäköisyydet $P(x = 0)$, $P(x = 1)$, ..., $P(x = 4)$ ja x :n odotusarvo. (K1980/9B)

Nyt tarkastellaan kaavaa

$$P(x = k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{4}{4-k}}{\binom{9}{4}} =$$

$$1. \text{ Kun miehiä} = 0 \text{ ja naisia} = 4, P(x = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{1 \cdot 1}{126} = \frac{1}{126}$$

$$2. \text{ Kun miehiä} = 1 \text{ ja naisia} = 3, P(x = 1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{9}{4}} = \frac{5 \cdot 4}{126} = \frac{20}{126}$$

$$3. \text{ Kun miehiä} = 2 \text{ ja naisia} = 2, P(x = 2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{10 \cdot 6}{126} = \frac{60}{126}$$

$$4. \text{ Kun miehiä} = 3 \text{ ja naisia} = 1, P(x = 3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{10 \cdot 4}{126} = \frac{40}{126}$$

$$5. \text{ Kun miehiä} = 4 \text{ ja naisia} = 0, P(x = 4) = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{9}{4}} = \frac{5 \cdot 1}{126} = \frac{5}{126}$$

$$\text{Odotusarvo: } \mu = 0 \cdot \frac{1}{126} + 1 \cdot \frac{20}{126} + 2 \cdot \frac{60}{126} + 3 \cdot \frac{40}{126} + 4 \cdot \frac{5}{126} = \frac{280}{126} \approx 2,22$$

SB12.8

Heitetään arpakuutiota ja tetraedrin muotoista noppaa. Laske saadun pisteluvun odotusarvo ja keskihajonta.

Noppa2												
	4	5	6	7	8	9	10					
	3	4	5	6	7	8	9					
	2	3	4	5	6	7	8					
	1	2	3	4	5	6	7					
Noppa1												
	1	2	3	4	5	6						
Summa			TN					$(x_k - \mu)$	$(x_k - \mu)^2$	$p_k (x_k - \mu)^2$		
	2	1	0,04	0,08	-4	16	0,66666667					
	3	2	0,08	0,25	-3	9	0,75					
	4	3	0,13	0,5	-2	4	0,5					
	5	4	0,17	0,83	-1	1	0,16666667					
	6	4	0,17	1	0	0	0					
	7	4	0,17	1,17	1	1	0,16666667					
	8	3	0,13	1	2	4	0,5					
	9	2	0,08	0,75	3	9	0,75					
	10	1	0,04	0,42	4	16	0,66666667					
		24	1	μ 6								
								σ^2	4,16666667			
								σ	2,04			

Vastaus: Odotusarvo on 6 ja kewskihajonta on noin 2,04.

SB12.9



Kuinka monta kertaa painottomatonta noppaa on heitettävä, jotta saataisiin yksi ykkönen vähintään 99 %:n todennäköisyydellä? Tee tämä tehtävä taulukkolaskentaohjelma. Sovella taulukkolaskentaohjelmaa ratkaisussa. Onko tämä mahdollista ratkaista myös GeoGebralla?

LibreOfficella:

Merkitään A="ainakin yksi ykkönen", jolloin A:n komplementti \bar{A} = "ei yhtään ykköstä".

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \text{ ja } P(A) = 1 - P(\bar{A}). \text{ Siis } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99 \text{ Tutkitaan problemaa alla olevan}$$

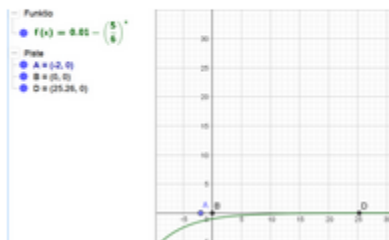
taulukoinnin mukaan:

	A	B	C
1			
2		komplementin	
3	Heittokertojen	todennäköisyys	$1 - (5/6)^n$
4	lukumäärä n	5/6	1 - (5/6)^n
5	1	0,8333333333	0,1666666667
6	2	0,6944444444	0,3055555556
7	3	0,5787037037	0,4212962963
8	4	0,4814814815	0,517469136
9	5	0,4018769231	0,598122428
10	6	0,3348979592	0,665102023
11	7	0,2790183528	0,7209816528
12	8	0,2332149123	0,7674319606
13	9	0,1944444444	0,8061930005
14	10	0,1615234375	0,8384944171
15	11	0,1336881373	0,8654120143
16	12	0,1101073416	0,8878433452
17	13	0,0901348633	0,906536121
18	14	0,0731874306	0,921134362
19	15	0,0591895428	0,9329945285
20	16	0,0479001772	0,9420121071
21	17	0,0389562121	0,9485961559
22	18	0,0318733333	0,953089632
23	19	0,0262896136	0,956099136
24	20	0,0218769231	0,9579159467
25	21	0,0183333333	0,9587620889
26	22	0,0153703704	0,958860741
27	23	0,0128961373	0,9582906617
28	24	0,0107341629	0,957408848
29	25	0,0089136212	0,95617404
30	26	0,00734375	0,9546508
31	27	0,00601194	0,9527204194
	28	0,00496629	0,950336629
	29	0,00414725	0,94744725

Voimme helposti havaita, että n:n arvosta 26 lähtien (keltaisella) epäyhtälö pitää paikkansa.

GeoGebralla:

Ratkaisussa syötetään tehtävässä annettu funktio ja piirretään x-akseliin päälle suora. Lopuksi toisesta vasemmalla olevasta komentopainikevalikosta valitaan leikkauspiste toiminto ja saadaan pisteen D koordinaatit. Seuraava kuva 9 mallintaa tilannetta.



Kuva 9. Harjoituksen ratkaisu GeoGebralla.

SB12.10

Hilkka totesi, että viidestä erään tulppanilajikkeen sipuleista itää viikon sisällä korkeintaan kaksi sipulia 20 % todennäköisyydellä. Mikä on tällaisen tulppanilajikkeen itämistodennäköisyys viikon sisällä?

Merkitään $k=0$ tarkoittaa 0 sipulia itää, $k=1$ tarkoittaa 1 sipuli itää ja $k=2$ tarkoittaa 2 sipulia itää.

1. Kun $k=0$ $P_0 = \binom{5}{0} \cdot (p)^0 (1-p)^5$
2. Kun $k=1$ $P_1 = \binom{5}{1} \cdot (p)^1 (1-p)^4$

Taulukossa

n	p	K=0	K=1	K=2	Summa	
	1	0,01	0,95099005	0,048029801	0,000970299	0,999990149
	2	0,02	0,903920797	0,092236816	0,003764768	0,999922381
	3	0,03	0,858734026	0,132793922	0,008214057	0,999742004
	4	0,04	0,815372698	0,169869312	0,014155776	0,999397786
	5	0,05	0,773780938	0,203626563	0,021434375	0,998841875
	6	0,06	0,733904022	0,234224688	0,029901024	0,998029734
	7	0,07	0,695688369	0,261818204	0,039413493	0,996920066
	8	0,08	0,659081523	0,286557184	0,049836032	0,995474739
	9	0,09	0,623111111	0,308111111	0,059022222	0,993111111
	10	0,1	0,590490000	0,326100000	0,067500000	0,989900000
	11	0,11	0,560890000	0,340810000	0,075200000	0,985900000
	12	0,12	0,533920000	0,352400000	0,081600000	0,981200000
	13	0,13	0,508370000	0,360800000	0,086800000	0,975900000
	14	0,14	0,484040000	0,366000000	0,090800000	0,970000000
	15	0,15	0,460750000	0,368100000	0,093600000	0,963500000
	16	0,16	0,438320000	0,367100000	0,095200000	0,956500000
	17	0,17	0,416670000	0,363100000	0,095600000	0,949000000
	18	0,18	0,395730000	0,356100000	0,094800000	0,941000000
	19	0,19	0,375430000	0,346100000	0,092900000	0,932500000
	20	0,2	0,355680000	0,333100000	0,089900000	0,923500000
	21	0,21	0,336410000	0,317100000	0,085900000	0,914000000
	22	0,22	0,317550000	0,298100000	0,080900000	0,904000000
	23	0,23	0,299130000	0,276100000	0,074900000	0,893500000
	24	0,24	0,281180000	0,251100000	0,067900000	0,882500000
	25	0,25	0,264650000	0,223100000	0,059900000	0,871000000
	26	0,26	0,249480000	0,192100000	0,050900000	0,859000000
	27	0,27	0,235610000	0,158100000	0,040900000	0,846500000
	28	0,28	0,223080000	0,121100000	0,029900000	0,833500000
	29	0,29	0,211830000	0,081100000	0,017900000	0,820000000
	30	0,3	0,201800000	0,038100000	0,005900000	0,806500000
	31	0,31	0,192930000	0,001100000	0,000900000	0,793000000
	32	0,32	0,185180000	0,000000000	0,000000000	0,779500000
	33	0,33	0,178500000	0,000000000	0,000000000	0,766000000
	34	0,34	0,172850000	0,000000000	0,000000000	0,752500000
	35	0,35	0,168180000	0,000000000	0,000000000	0,739000000
	36	0,36	0,164450000	0,000000000	0,000000000	0,725500000
	37	0,37	0,161630000	0,000000000	0,000000000	0,712000000
	38	0,38	0,159680000	0,000000000	0,000000000	0,698500000
	39	0,39	0,158570000	0,000000000	0,000000000	0,685000000
	40	0,4	0,158280000	0,000000000	0,000000000	0,671500000
	41	0,41	0,158790000	0,000000000	0,000000000	0,658000000
	42	0,42	0,160080000	0,000000000	0,000000000	0,644500000
	43	0,43	0,162130000	0,000000000	0,000000000	0,631000000
	44	0,44	0,164930000	0,000000000	0,000000000	0,617500000
	45	0,45	0,168470000	0,000000000	0,000000000	0,604000000
	46	0,46	0,172730000	0,000000000	0,000000000	0,590500000
	47	0,47	0,177700000	0,000000000	0,000000000	0,577000000
	48	0,48	0,183370000	0,000000000	0,000000000	0,563500000
	49	0,49	0,189730000	0,000000000	0,000000000	0,550000000
	50	0,5	0,196780000	0,000000000	0,000000000	0,536500000
	51	0,51	0,204510000	0,000000000	0,000000000	0,523000000
	52	0,52	0,212910000	0,000000000	0,000000000	0,509500000
	53	0,53	0,221970000	0,000000000	0,000000000	0,496000000
	54	0,54	0,231690000	0,000000000	0,000000000	0,482500000
	55	0,55	0,242070000	0,000000000	0,000000000	0,469000000
	56	0,56	0,253110000	0,000000000	0,000000000	0,455500000
	57	0,57	0,264810000	0,000000000	0,000000000	0,442000000
	58	0,58	0,277170000	0,000000000	0,000000000	0,428500000
	59	0,59	0,290190000	0,000000000	0,000000000	0,415000000
	60	0,6	0,303880000	0,000000000	0,000000000	0,401500000
	61	0,61	0,318140000	0,000000000	0,000000000	0,388000000
	62	0,62	0,332970000	0,000000000	0,000000000	0,374500000
	63	0,63	0,348370000	0,000000000	0,000000000	0,361000000
	64	0,64	0,364340000	0,000000000	0,000000000	0,347500000
	65	0,65	0,380880000	0,000000000	0,000000000	0,334000000
	66	0,66	0,397990000	0,000000000	0,000000000	0,320500000
	67	0,67	0,415670000	0,000000000	0,000000000	0,307000000
	68	0,68	0,433920000	0,000000000	0,000000000	0,293500000
	69	0,69	0,452730000	0,000000000	0,000000000	0,280000000
	70	0,7	0,472100000	0,000000000	0,000000000	0,266500000
	71	0,71	0,492030000	0,000000000	0,000000000	0,253000000
	72	0,72	0,512520000	0,000000000	0,000000000	0,239500000
	73	0,73	0,533570000	0,000000000	0,000000000	0,226000000
	74	0,74	0,555180000	0,000000000	0,000000000	0,212500000

Vastaus: p:n arvosta 68 % ylöspäin viidestä siemenestä itää korkeintaan kaksi siementä 20 % todennäköisyydellä.

SB12.11

Heitettäessä kahta noppaa silmälukujen neliöiden summa s on satunnaismuuttuja. Määritä s :n odotusarvo. (K1989/6a)

Noppa2	Noppa2 neliö								
6	36	37	40	45	52	61	72		
5	25	26	29	34	41	50	61		
4	16	17	20	25	32	41	52		
3	9	10	13	18	25	34	45		
2	4	5	8	13	20	29	40		
1	1	2	5	10	17	26	37		
	Noppa1 neliö	1	4	9	16	25	36		
	Noppa1	1	2	3	4	5	6		
keskiarvo	30,33333333								
Neliöitten summa	1092								

Kunkin tapauksen todennäköisyys on $\frac{1}{36}$.

Nyt odotusarvo saadaan laskettua: $E\bar{x} = \frac{1}{36} \cdot 1092 = 30\frac{1}{3} \approx 30,3$

SB12.12

Kahta noppaa heitettäessä saadut pisteluvut olkoot x ja y . Määritä satunnaismuuttujan $I_x - y$ l todennäköisyysjakautuma ja odotusarvo (keskiarvo) (K1977/7b)

Taulukossa lasketaan erotukset kaavalla: "=ITSEISARVO(\$A\$9-D10)"

Noppa2									
6	5	4	3	2	1	0			
5	4	3	2	1	0	1			
4	3	2	1	0	1	2			
3	2	1	0	1	2	3			
2	1	0	1	2	3	4			
1	0	1	2	3	4	5			
Noppa1	1	2	3	4	5	6			

Erotukset	f	$x_i \cdot f$
0	6	0
1	10	10
2	8	16
3	6	18
4	4	16
5	2	10
summa	36	70
keskiarvo		1,944444444

