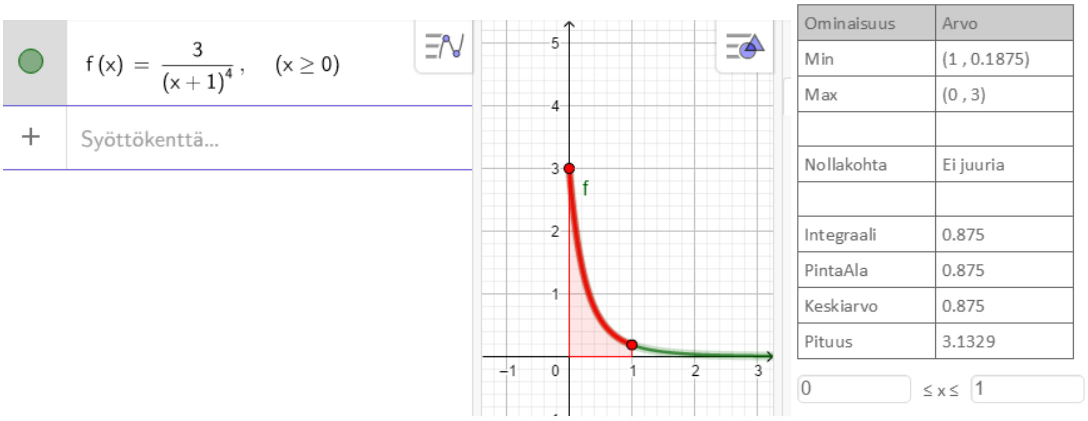
PB14.2

Erään rottapopulaation ikäjakauma noudattaa funktiota $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{(x+1)^4}, kun\ 0\leqslant x\\ 0 \quad ,muualla\end{cases}$, missä x kuvaa rotan ikää.

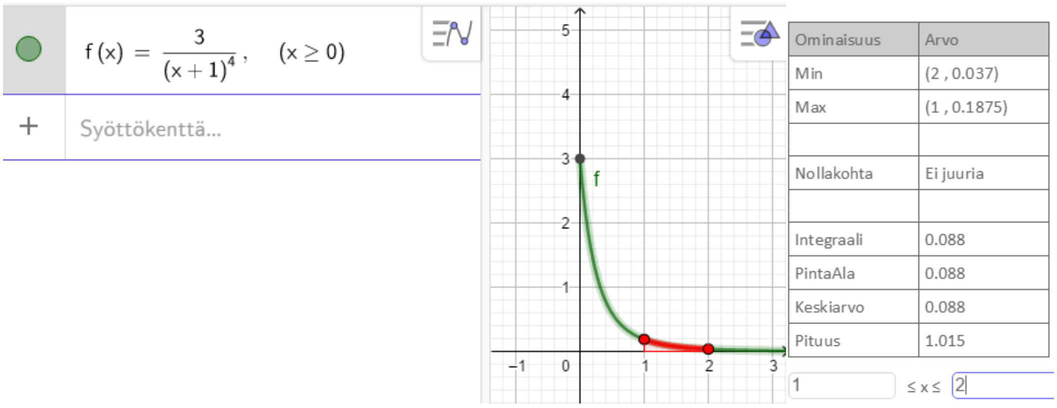
Tutki piirto-ohjelman avulla alla olevia kysymyksiä.

a) Määritä todennäköisyys, että satunnaisesti valittu rotta on alle 1 vuotta.

b) Määritä todennäköisyys, että satunnaisesti valittu rotta on alle 1-2 vuotta.



Siis $P(0\leq \underline{x}\leq 1)\approx 0,875$



Siis $P(1\leq \underline{x}\leq 2)\approx 0,088$

PB14.3

Olkoon satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{8}$, kun $0\leqslant x\leqslant 4$ ja nolla muualla. Laske

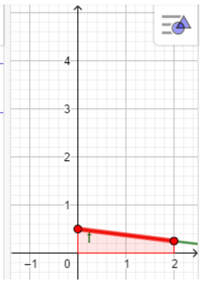
a) $P(\underline{x}\leqslant 2)$ b) $P(1\leqslant \underline{x}\leqslant 2)$ c) $P(3,2\leqslant \underline{x}\leqslant 3,85)$

Pitkä matematiikka, Maa10, Malliratkaisut Luku 14

a)

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}, \quad (0 \le x \le 4)$

Syöttökenttä...

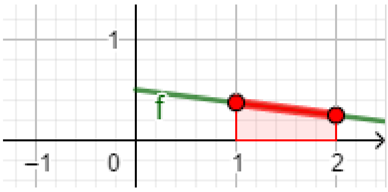


Ominaisuus	Arvo
Min	(2 , 0.25)
Max	(0 , 0.5)
Nollakohta	Ei juuria
Integraali	0.75
PintaAla	0.75
Keskiarvo	0.375
Pituus	2.0156

0 ≤ x ≤ 2

$P(0 \le \underline{x} \le 2) \approx 0,75$

b)

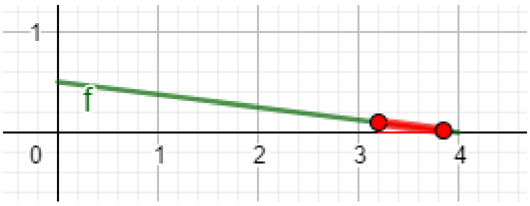


Ominaisuus	Arvo
Min	(2 , 0.25)
Max	(1 , 0.375)
Nollakohta	Ei juuria
Integraali	0.3125
PintaAla	0.3125
Keskiarvo	0.3125
Pituus	1.0078

1 ≤ x ≤ 2

$P(1 \le \underline{x} \le 2) \approx 0,3125$

c)



Ominaisuus	Arvo
Min	(3.85 , 0.0188)
Max	(3.2 , 0.1)
Nollakohta	Ei juuria
Integraali	0.0386
PintaAla	0.0386
Keskiarvo	0.0594
Pituus	0.6551

3.2 ≤ x ≤ 3.85

$P(3,2 \le \underline{x} \le 3,85) \approx 0,0386$

PB14.4

Olkoon funktio $f(x) = \begin{cases} ax, kun\ 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 \quad , muualla \end{cases}$. Säädä parametri a, että $f(x)$ täyttää tiheysfunktion määritelmän.

Laske todennäköisyys $P(1 \leqslant \underline{x} \leqslant 3)$

Ratkaisu:

1^o Välttämätön ehto on, että $a > 0$, jolloin f on ei-negatiivinen kaikilla x:n arvoilla.

$2^o \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0 + \int_0^6 ax\,dx = \Big/_0^6 \frac{ax^2}{2} = 1$, josta $a = \frac{1}{18}$ Nyt siis tiheysfunktio $f(x) = \frac{1}{18}x$ ja sen kertymäfunktio on $F(x) = \frac{1}{36}x^2$

$P(1 \leqslant \underline{x} \leqslant 3) = F(3) - F(1) = \frac{2}{9}$

PB14.5

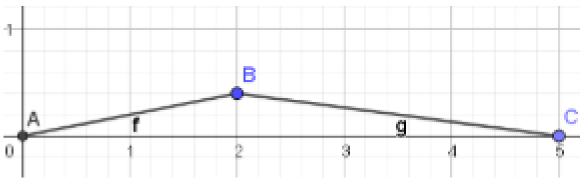
Erään satunnaismuuttujan x tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , kun\ x < 0 \\ \frac{1}{5}x & , kun\ 0 \leqslant x < 2 \\ -\frac{2}{15}x + \frac{2}{3} & , kun\ 2 \leqslant x < 5 \\ 0 & , kun\ x \geqslant 5 \end{cases}$$

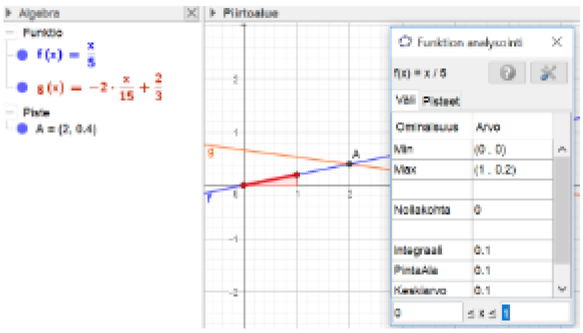
a) Piirrä tiheysfunktion kuvaaja.

b) Laske todennäköisyydet $P(x \leqslant 1)$, $P(1 < x \leqslant 3)$ ja $P(x > 3)$. (S2003/8)

a)

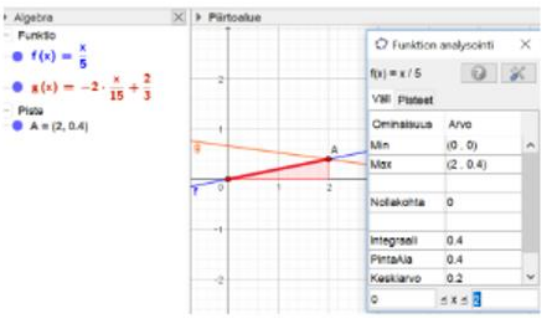


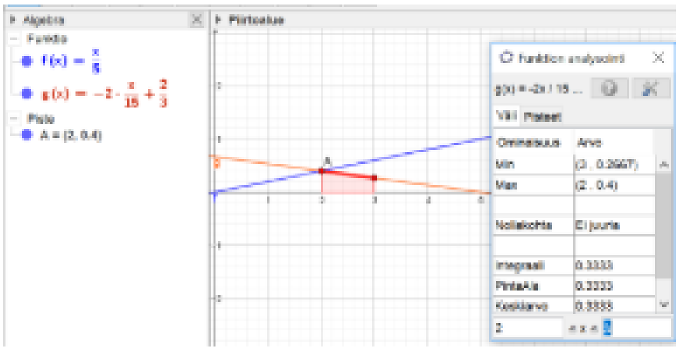
b)



Vastaus: $P(x \leqslant 1) = \dfrac{1}{10}$

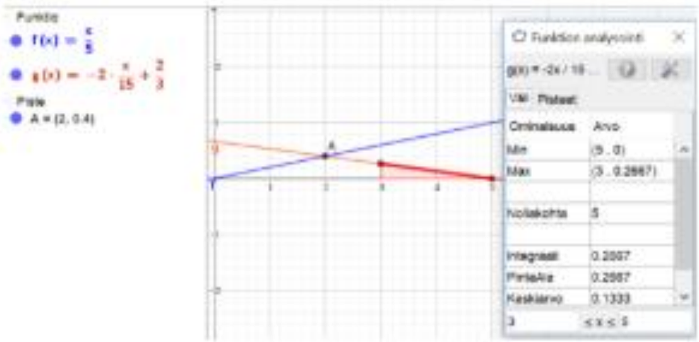
Seuraavaksi:





$$P(1 < x \leqslant 3) = \frac{4}{10} + \frac{1}{3} = \frac{22}{30}$$

Ja lopulta:



$$P(x > 3) \approx 26,7\%$$

SB14.6

Satunnaismuuttuja X saa arvoja väliltä $[0, 1]$, ja sen tiheysfunktio on muotoa $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{2}$. Määritä vakio a. Millä todennäköisyydellä X on välillä $[0, \frac{1}{2}]$? (K2007/8)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} dx = \int_{0}^{1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} dx =$$

$$\Big/_{0}^{1} \frac{x^2}{2a} + \frac{a}{2}x = 1, \text{ josta saadaan } \frac{1}{2a} + \frac{a}{2} = 1 \mid \cdot 2a$$

Joten saadaan $a^2 - 2a + 1 = 0$ eli $(a-1)^2 = 0$, josta $a = 1$

Kun $a = 1$, niin $f(x) = x + \frac{1}{2}$

ja se on ei-negatiivinen funktio ja $\int_{0}^{1} x + \frac{1}{2} dx = 1$

Nyt saadaan $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} dx = \frac{3}{8}$

SB14.7

Olkoon tiheysfunktio $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{50}x, kun\ 0\leqslant x\leqslant 10\\ 0\quad, muualla\end{cases}$.

Laske

a) $P(1\leqslant \underline{x}\leqslant 3)$ b) odotusarvo c) keskihajonta.

a) $P(1\leq \underline{x}\leq 3)==\int_1^3 \frac{x}{50}dx=\Big/_1^3 \frac{x^2}{100}=\frac{9}{100}-\frac{1}{100}=\frac{8}{100}=\frac{2}{25}$

b) Odotusarvo $E(\underline{x})=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^{10} x\cdot\frac{x}{50}dx=$

$\int_0^{10}\frac{x^2}{50}dx=\Big/_0^{10}\frac{x^3}{150}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$

c) Varianssi on: $D^2(\underline{x})=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(\underline{x}))^2\cdot f(x)dx=$

$\int_0^{10}(x-\frac{20}{3})^2\cdot\frac{x}{50}dx=$

$\int_0^{10}(\frac{x^3}{50}-\frac{4x^2}{15}+\frac{8x}{9})dx=$

$\Big/_0^{10}\frac{9x^4-160x^3+800x^2}{1800}=\frac{50}{9}$

$\approx 5,56$

Keskihajonta on $D(\underline{x})=\sqrt{\frac{50}{9}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\approx 2,36$

SB14.8

Erään tehtaan valmistamien hehkulamppujen kestoajan jakaumalla on tiheysfunktio

$f=\begin{cases}6\,[0,25-(t-1,5)^2], kun\ 1\leqslant t\leqslant 2\\ 0\qquad, muulloin.\end{cases}$

(muuttuja t ilmaisee ajan tuhansina tunteina). Millä todennäköisyydellä tällainen lamppu palaa vähintään 1300 tuntia? (K1984/8a)

Nyt $\int_{1,3}^{2} 6[0,25-(t-1,5)^2]dt=$

$\Big/_{1,3}^{2} 2[3\cdot 0,25\cdot t-(t-1,5)^3]=\frac{98}{125}=0,784$

Vastaus: Siis $78,4\%$:n todennäköisyydellä.

SB14.9

Tikkataulun säde on 20 cm, ja taulu jakautuu kymmeneen samankeskiseen yhtä leveään renkaaseen, jotka on numeroitu ulkoa sisäänpäin 1:stä 10:een. Gabrielin heittämät tikat osuvat tauluun siten, että niiden etäisyys r taulun keskipisteestä noudattaa todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktio on:

$$\begin{cases} \frac{3}{16000}\left(400-r^2\right), kun\ 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , muulloin. \end{cases}$$

Tässä r on ilmaistu senttimetreinä.

a) Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een.

b) Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämistä viidestä tikasta ainakin kolme osuu 9:ään tai 10:een. (K2005/9)

a)

Tehtävän annon mukaiseseti:

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{16000}\left(400-r^2\right) dr =$$

$$\Big/_0^x \frac{3}{16000}(400r - \frac{1}{3}r^3) = \frac{3}{16000}(400x - \frac{1}{3}x^3)$$

Gabrielin heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een on:

$$P(0 \leq \underline{x} \leq 4) = F(4) - F(0) =$$

$$\frac{3}{16000}(400 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 4^3) = \frac{4736}{16000} = 0,296$$

Siis todennäköisyys, että Gabrielin heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een on: $p = 0,296$.

Tehtävän voi ratkaista binomitodennäköisyydellä, missä $p = 0,296$, $n = 5$ ja $k = 3,4,5$.

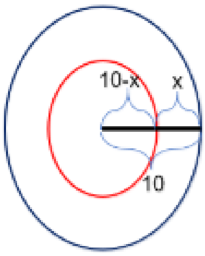
A	B	C	D	E
	n	k	p	Binomi tn.
	5	0	0,296	0,172927194
	5	1	0,296	0,363540125
	5	2	0,296	0,305704196
	5	3	0,296	0,128534719
	5	4	0,296	0,027021503
	5	5	0,296	0,002272263
			summa	1
			summa k=3-5	0,157828485

Vastaus: Siis $p = 0,296$ ja $P(\underline{x} = 3 \quad tai \quad \underline{x} = 4 \quad tai \quad \underline{x} = 5) = 0,158$.

SB14.10

Halkaisijaltaan 20 cm olevaan pyöreään maalitauluun heitetään umpimähkään tikkaa. Olkoon satunnaismuuttuja X tauluun osuneen tikan etäisyys reunasta. Määritä X:n kertymäfunktio, tiheysfunktio, odotusarvo ja keskihajonta. (S1997/9a)

Piirretään ensin mallikuva:



Olkoon kertymäfunktio muotoa: $F(x) = P(X \leqslant x)$

Nyt $F(x) = 0$, kun $x < 0$ ja $F(x) = 1$, kun $x \geqslant 10$.

Koko taulun pinta-ala on : $A = 100\pi$.

Sisäympyrän pinta-ala on: $A_c = (10 - x)^2 \pi$.

Ulkorenkaan pinta-ala on: $A_t = 100\pi$ - $(10 - x)^2 \pi$.

Siis todennäköisyys: $P(X \leqslant x)$ saadaan määritettyä geometrisena todennäköisyytenä:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{100\pi - (10 - x)^2 \pi}{100\pi} =$$

$$\frac{100 - (100 - 20x - x^2)}{100} = \frac{x}{5} - \frac{x^2}{100}$$

Siis $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{x^2}{100}, kun\ 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 \quad\quad , muulloin \end{cases}$

Kun saatu kertymäfunktio deerivoidaan, saadan sen tiheysfunktio:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{5} - \frac{x}{50}$$

Siis $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{x}{50}, kun\ 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 \quad\quad , muulloin \end{cases}$

Odotusarvo $E(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{10} \frac{x}{5} - \frac{x^2}{50} dx =$

$$\Big/_0^{10} \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{150} = \frac{10}{3}$$

Varianssi on: $D^2(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\underline{x}))^2 \cdot f(x) dx =$

$$\int_0^{10} (x - \frac{10}{3})^2 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{x}{50}) dx = \int_0^{10} (-\frac{x^3}{50} + \frac{x^2}{3} - \frac{14x}{9} + \frac{20}{9}) dx =$$

$$\Big/_0^{10} - \frac{x^4}{200} + \frac{x^3}{9} - \frac{7x^2}{9} + \frac{20x}{9} = \frac{50}{9}$$

Keskihajonta on $D(\underline{x}) = \sqrt{\frac{50}{9}} \approx 2,36$

SB14.11

Sijoittaja käytti osakkeen kurssikehityksen arvioimiseen todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktion maksimi saavutetaan markkina-arvolla 20,50 € ja joka on nolla yli viiden euron poikkeamilla markkina-arvosta 20,50 €. Tiheysfunktio on jatkuva, ja sen kuvaaja koostuu kahdesta lineaarisesta osasta välillä 15,50 €- 25,50 €.
a) Määritä tiheysfunktion lauseke.
b) Millä todennäköisyydellä osakkeen markkina- arvo on alle 19 €?
c) Muiden kurssien nousu sai sijoittajan muuttamaan jakaumaa epäsymmetriseksi niin, että maksimi saavutettiin edelleen arvolla 20,50 €, mutta nollakohta 25,50 € siirtyi pisteeseen 30,50 €. Muilta ominaisuuksiltaan jakauma pysyi samantyyppisenä kuin aikaisemmin.Määritä tämän uuden jakauman odotusarvo. (S2012/14)

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, kun\ x \leqslant 15,50 \\ \frac{x}{25} - \frac{31}{50}, kun\ 15,50 < x \leqslant 20,50 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{51}{50}, kun\ 20,50 < x \leqslant 25,50 \\ 0, kun\ 25,50 \leqslant x \end{cases}$$

b)

$$P(\underline{x} \leqslant 19) = \int_{-\infty}^{19} f(x)\,dx = \int_{15,50}^{19} (\frac{x}{25} - \frac{31}{50})dx =$$

$$\Big/_{15,50}^{19} \frac{x^2}{50} - \frac{31x}{50} \approx 0,245$$

c)

Nyt

$$g(x) = \begin{cases} 0, kun\ x \leqslant 15,50 \\ \frac{2}{75}x - \frac{31}{75}, kun\ 15,50 < x \leqslant 20,50 \\ -\frac{1}{75}x + \frac{61}{150}, kun\ 20,50 < x \leqslant 30,50 \\ 0, kun\ 30,50 \leqslant x \end{cases}$$

Josta odotusarvo $E(\underline{x}) \approx 22,17€$

SB14.12

Erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = ax + b$ välillä $0 \leqslant x \leqslant 3$ ja muualla $f(x) = 0$. Määritä vakiot a ja b siten, että jakautuman keskiarvo (odotusarvo) on 1. Laske lisäksi todennäköisyys sille, että tämän satunnaismuuttujan arvo on vähintään 1. (K1975/8b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0 + \int_{0}^{3} ax + b\ dx = \Big/_{0}^{3} \frac{a}{2}x^2 + bx = \frac{9a}{2} + 3b = 1$$

$$E(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{0}^{3} ax^2 + bx\ dx = \Big/_{0}^{3} \frac{a}{3}x^3 - \frac{b}{2}x = 9a - \frac{3}{2}b = 1$$

Saadaan siis yhtälöpari, jolle ratkaisu:

$$\left.\begin{cases} \frac{9a}{2}+3b=1 \\ 9a-\frac{3b}{2}=1 \end{cases}\right|_{a,\,b}$$

$$\left\{a=\frac{2}{15},\ b=\frac{2}{15}\right\}$$

Siis tiheysfunktio on: $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}x + \frac{2}{15} & kun\ x \in [0{,}3] \\ 0 & muualla \end{cases}$

Nyt $P(1 \leq X) = \int_{1}^{3} \frac{2}{15}x + \frac{2}{15}dx = \Big/_{1}^{3} \frac{x^2 + 2x}{15} = \frac{4}{5}$