PA13.2

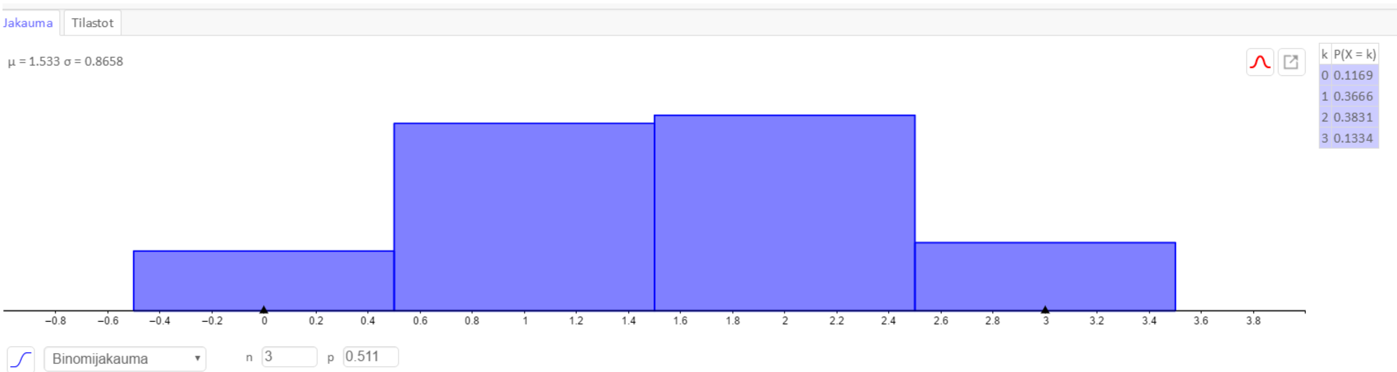
Eräässä jakaumassa satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim Bin\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Laske $E\underline{x}$ ja $D\underline{x}$.

$$E\underline{x} = \mu = np = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5$$

$$D\underline{x} = \sigma = \sqrt{np\,(1-p)} = \sqrt{npq} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PB13.3

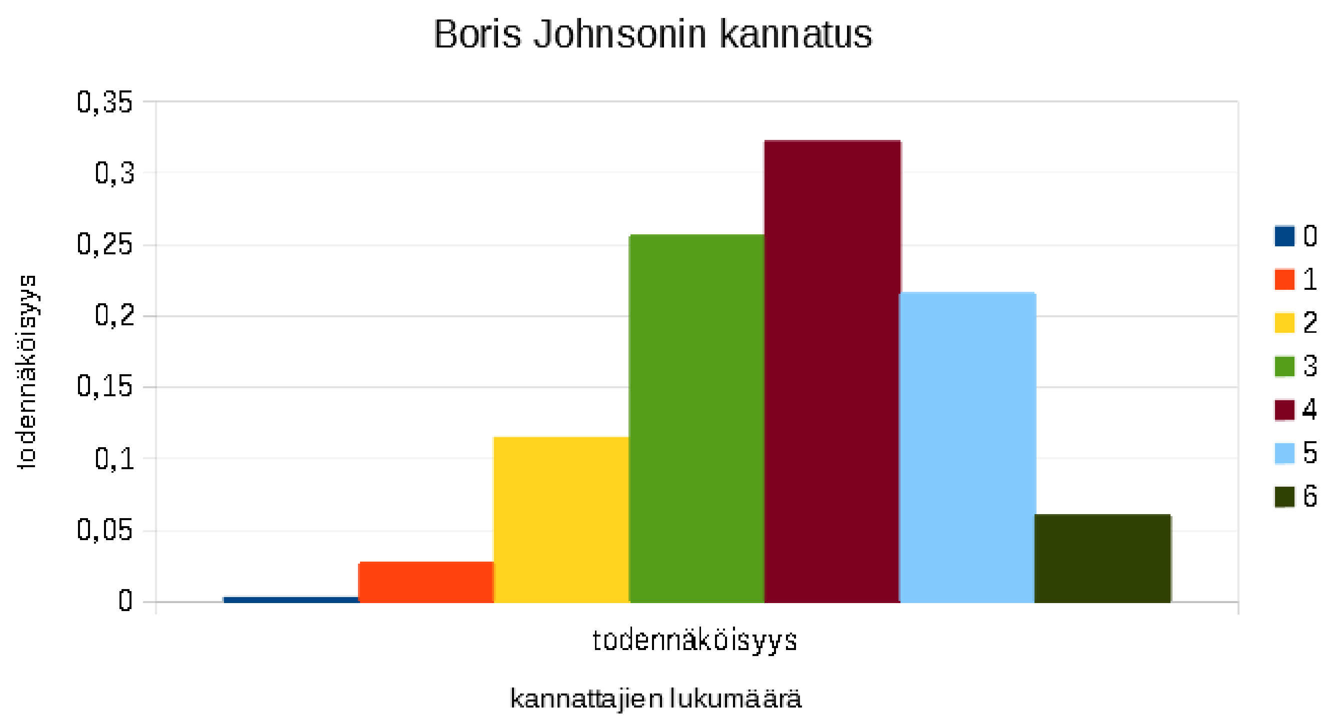
Tilastojen mukaan poikia syntyy enemmän kuin tyttöjä. Ajanjaksolla 2011–2015 Suomessa syntyi noin 290 000 lasta, joista poikia oli noin 148 000 ja tyttöjä noin 142 000. Suomessa syntyvistä lapsista poikien osuus on noin 51,1 prosenttia ja osuus muissa Euroopan Unionin maissa samalla tasolla. EU28-maissa poikien osuus syntyneistä on 51,3 prosenttia. (Lähde: https://tilastokoulu.stat.fi/verkkokoulu_v2.xql?course_id=tkoulu_vaesto&lesson_id=5&subject_id=3&page_type=sisalto) Selvitä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla Suomessa syntyneiden 3-lapsisen perheen poikien lukumäärän (0, 1, 2 tai 3 poikaa) todennäköisyydet ja tee tästä binomin jakaumasta histogrammi.



PB13.4

Iso-Britannian pääministeriksi vuonna 2019, äänestettiin Boris Johnson. Eräässä vaalipiirissä häntä kannatti 62,64 % äänestäneistä. Tutki LibreOfficen taulukkolaskentaohjelmalla Boris Johnsonin kannatusta satunnaistesti valitun kuuden äänestäjän suhteen ja työstä jakaumasta histogrammi.

	k	n	p	todennäköisyys
	0	6	0,6264	0,0027192
	1	6	0,6264	0,027355039
	2	6	0,6264	0,114662717
	3	6	0,6264	0,256333782
	4	6	0,6264	0,322338359
	5	6	0,6264	0,216180672
	6	6	0,6264	0,060410231



SB13.5

Vasenkätisiä on erään tiedon mukaan 10 % väestöstä. Kuinka monta henkilöä tulee satunnaisesti kootussa ryhmässä olla, jotta siinä olisi ainakin yksi vasenkätinen todennäköisyydellä 0,8? **(k2009/11):**

Tapahtuman ”*Ainakin yksi vasenkätinen*” komplementti on ”*Ei yhtään vasenkätistä*” tai ”*Kaikki oikeakätisiä*”

Nyt P(”*Ainakin yksi vasenkätinen*”= 1 – P(”*Kaikki oikeakätisiä*”)

Jos vasenkätisyyden todennäköisyys on 10 % niin oikeakätisyyden todennäköisyys on 90 %. Nyt selvitetään n epäyhtälöstä:

$$1-0,9^n \geq 0,8$$

$$0,9^n \leq 0,2$$

$$\lg 0,9^n \leq \lg 0,2$$

$$n \lg 0,9 \leq \lg 0,2$$

$$n \geq \frac{\lg 0,2}{\lg 0,9}, n \geq 15,2755...$$

Vastaus: Satunnaisesti kootussa ryhmässä tulee olla vähintään 16 henkilöä.

SB13.6

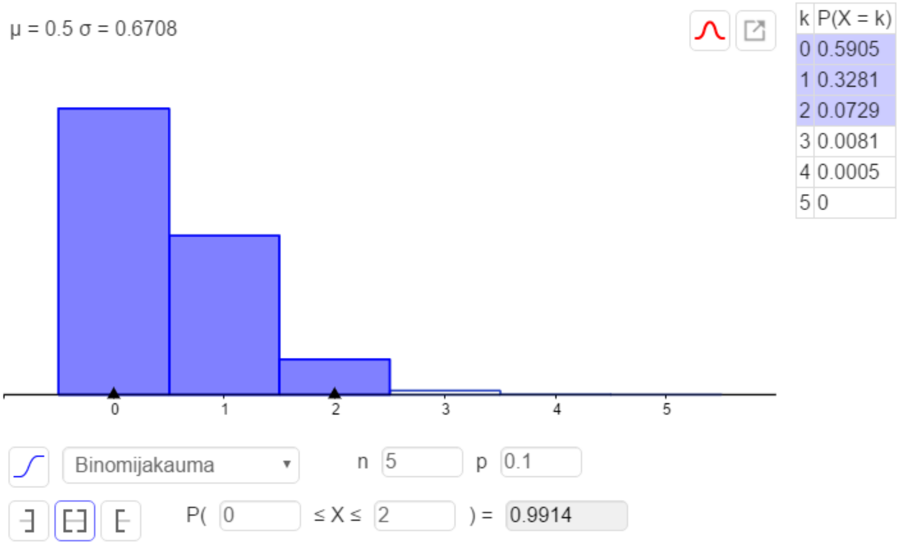
Jatsinoppapeliä pelataan viidellä arpakuutiolla. Mikä on todennäköisyys sille, että saadaan yhdellä heittokerralla kolme kakkosta ja kaksi kolmosta?

Merkitään tapahtumaa: ”*saadaan silmäluku kaksi*” kirjaimella k ja tapahtumaa: ”*saadaan silmäluku kolme*” kirjaimella v, niin suotuisat tapahtumat ovat: (kkkvv), (kkvkv), (kkvvk), (kvkkv), (kvkvk), (kvvkk), (vkkkv), (vkkvk), (vkvkk), (vvkkk).

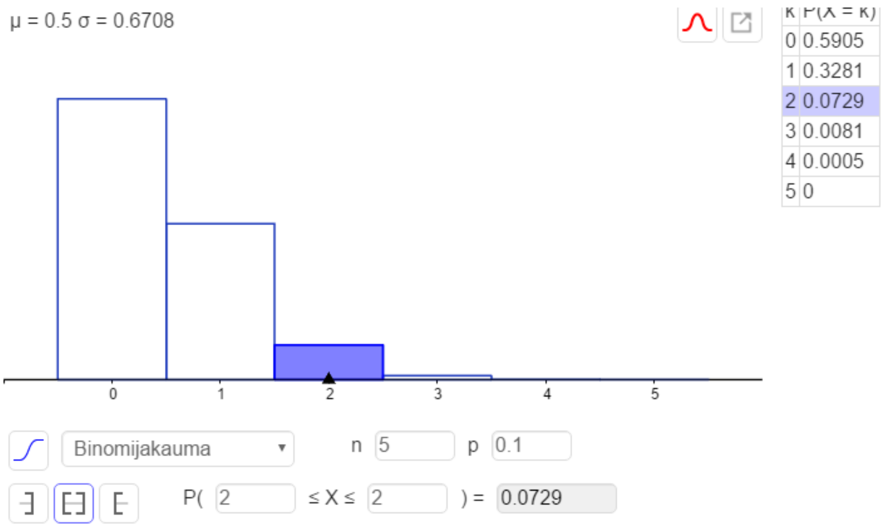
$$P(A) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0,0013$$

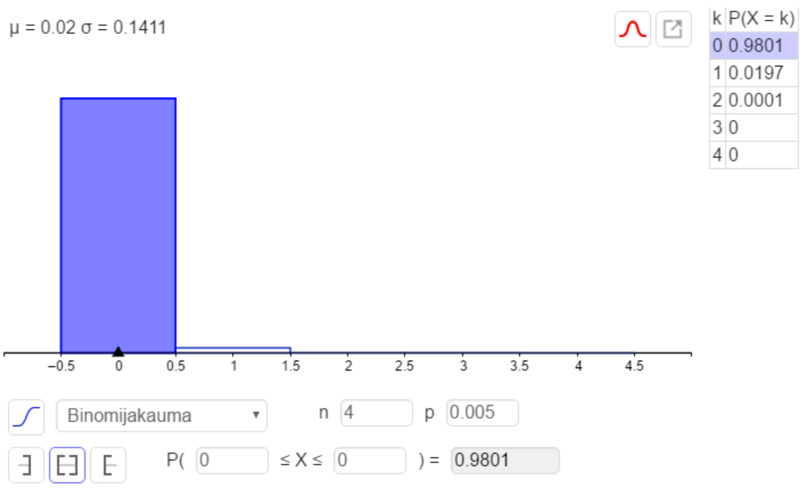
SB13.7

Sanalla värisokeus tarkoitetaan värinäön heikkoutta, jolloin ihminen näkee edes joitakin värejä. On todettu, että jonkin asteisesta värinäkökyvyn puutteesta kärsii miehistä noin 10 prosenttia ja naisista vastaavasti noin 0,5 prosenttia. (https://fi.wikipedia.org/wiki/V%C3%A4risokeus haettu 13.1.2020) Yhdessä ryhmässä on viisi miestä ja neljä naista. Millä todennäköisyydellä korkeintaan kaksi miestä kärsii värinäkökyvyn puutteesta? Millä todennäköisyydellä kaksi miestä kärsii ja yksikään nainen ei kärsi värinäkökyvyn puutteesta?



GeoGebran todennäköisyyslaskurin mukaisesti korkeintaan kaksi miestä kärsii värinäkökyvyn puutteesta noin 99 %:n todennäköisyydellä.





0.0729*0.9801

0.07144929

Kaksi miestä kärsii ja yksikään nainen ei kärsi värinäkökyvyn puutteesta noin 7,1 %:n todennäköisyydellä.

SB13.8

Vakioveikkauspelissä veikataan 6 – 18 kohteen voittajia varsinaisella peliajalla (1=kotivoitto, X=tasapeli tai 2=vierasvoitto) tai kahden taikka kolmen kilpailijan keskinäisen kilpailun tulosta taikka tulosvaihtoehdon toteutumista. Vakioveikkauspelissä valitaan voittajat jokaiseen kohteeseen. Vakio 1:ssä on aina 13 pelikohdetta, muissa Vakioissa 6 – 18. (https://www.veikkaus.fi/fi/vakio#!/ohjeet haettu: 13.1.2020). Oletetaan, että satunnainen asiakas pelaa peliä Vakio 1 yhdellä ruudukolla.

a) Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin 11 oikein tulos?

b) Tutki taulukkolaskentaohjelmalla satunnaismuuttujan oikein arvattujen kohteiden lukumäärän todennäköisyysjakauma ja esitä sen kuvaaja histogrammina.

n	k	p	pk		
13	0	0,333333333	0,005138		
13	1	0,333333333	0,033399		
13	2	0,333333333	0,100196		
13	3	0,333333333	0,183692		
13	4	0,333333333	0,229615		
13	5	0,333333333	0,206653		
13	6	0,333333333	0,137769		
13	7	0,333333333	0,068884		
13	8	0,333333333	0,025832		
13	9	0,333333333	0,007175		
13	10	0,333333333	0,001435		
13	11	0,333333333	0,000196		P11-P13
13	12	0,333333333	0,000016		0,02 %
13	13	0,333333333	0,000001		

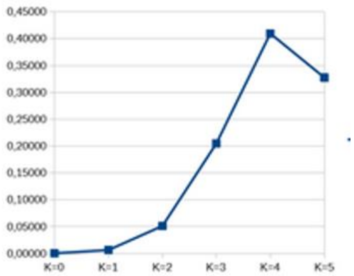
SB13.9

Erään urheilutoimittajan mukaan ampumahiihtäjä Kaisa Mäkäräinen osui ampumapaikalla keskimäärin neljään maaliin viidestä eli hänen osumistarkkuutensa on 80 %. Tutki taulukkolaskentaohjelmalla eri osumien (0-5) todennäköisyydet satunnaisella amupakerralla ja esitä tästä jakaumasta viivadiagrammi. Laske todennäköisyys sille, että Kaisa osuu ainakin kaksi kertaa ampumapaikalla. Laske vielä Kaisan osumatarkkuuten odotusarvo ja keskihajonta.

Sovelletaan tähän Binomitodennäköisyyttä. Nyt $p = \frac{4}{5}, q = \frac{1}{5}, n = 5$ ja k saa arvot $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

1. kun $k = 0$ $P_0 = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^5 \approx 0,00032$
2. kun $k = 1$ $P_1 = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \approx 0,00640$
3. kun $k = 2$ $P_2 = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \approx 0,05120$
4. kun $k = 3$ $P_3 = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \approx 0,20480$
5. kun $k = 4$ $P_4 = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \approx 0,40960$
6. kun $k = 5$ $P_5 = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \approx 0,32768$



1−(0.00032+0.00640)

0.99328

Kaisa osuu ampumapaikalla ainakin kaksi kertaa 99,3 %:n todennäköisyydellä.

Odotusarvo: $\mu = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$, Keskihajonta: $\sigma = \sqrt{5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} \approx 0,89$

SB13.10

Erään kukkasipulin itämistodennäköisyydeksi ilmoitetaan tuoteselosteessa 76 %.

a) Millä todennäköisyydellä ainakin kaksi sipulia viidestä itää?

b) Laadi viiden sipulin itämisestä todennäköisyysjakauma ja esitä se histogrammina.

c) Mikä on sipulin itämisen odotusarvo ja keskihajonta?

Nyt p=0,76, q=0,24, n=5 ja k=0,1,2,3,4,5

1. kun k=0 $P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0,76)^0\,(0,24)^5 \approx 0,00080$

2. kun k=1 $P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,76)^1\,(0,24)^4 \approx 0,01261$

3. kun k=2 $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (0,76)^2\,(0,24)^3 \approx 0,07985$

4. kun k=3 $P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (0,76)^3\,(0,24)^2 \approx 0,25285$

5. kun k=4 $P_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (0,76)^4\,(0,24)^1 \approx 0,40035$

6. kun k=5 $P_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (0,76)^5\,(0,24)^0 \approx 0,25355$

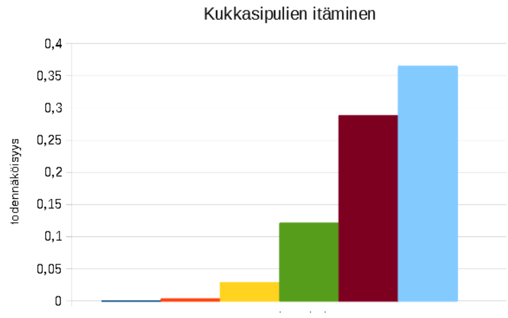
a)

```
1-(0.00080+0.01261)
                                      0.98659
```

Kaksi sipulia viidestä itää noin 98,7 %:n todennäköisyydellä.

b)

	k	n	p	todennäköisyys	
	0	6	0,76	0,000191103	
	1	6	0,76	0,003630957	
	2	6	0,76	0,028745073	
	3	6	0,76	0,121368084	
	4	6	0,76	0,288249201	
	5	6	0,76	0,365115654	

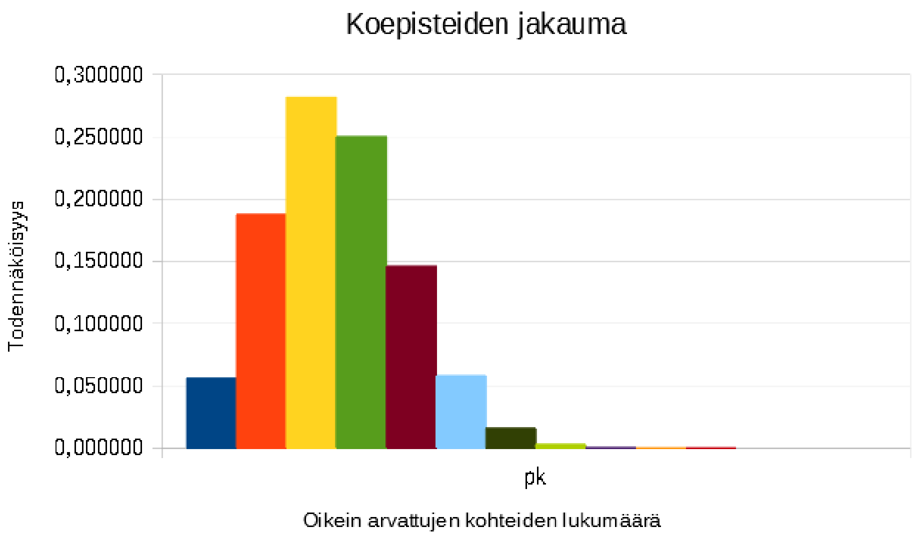


Odotusarvo: $\mu = 5 \cdot 0,76$ =3,8. Keskihajonta: $\sigma = \sqrt{5 \cdot 0,76 \cdot 0,24} \approx 0,95$

SB13.11

Erään kielen luetunymmärtämiskokeessa oli 10 monivalintatehtävää ja kussakin monivalinnassa 4 eri vaihtoehtoa. Kokeeseen osallistunut satunnainen opiskelija arvaa vastauksen jokaiseen kysymykseen. Selvitä taulukkolaskentaohjelman avulla oikeiden vastausten lukumäärän todennäköisyysjakauma ja laske sen odotusarvo. Millä todennäköisyydellä opiskelija arvaa ainakin 5 kohtaa oikein?

n	k	p	pk		
10	0	0,25	0,056314		
10	1	0,25	0,187712		
10	2	0,25	0,281568		
10	3	0,25	0,250282		
10	4	0,25	0,145998	P5-P10	
10	5	0,25	0,058399	0,078126907	
10	6	0,25	0,016222		
10	7	0,25	0,003090		
10	8	0,25	0,000386		
10	9	0,25	0,000029		
10	10	0,25	0,000001		



Odotusarvo on np=2,5 ja opiskelija arvaa ainakin viisi kohtaa oikein 7,8 %:n todennäköisyydellä.