PA15.2

Astronautit innostuivat kuunpinnalla hyppäämään pituutta. Yksi seurueen jäsenistä oli tilastoinut heidän hyppyjään ja havainnut sen noudattavan normaalijakaumaa $\underline{x} \sim \mathrm{N}(25, 8)$.

Normita seuraavien avaruushyppyjen pituudet: 17 m, 29 m ja 41 m.

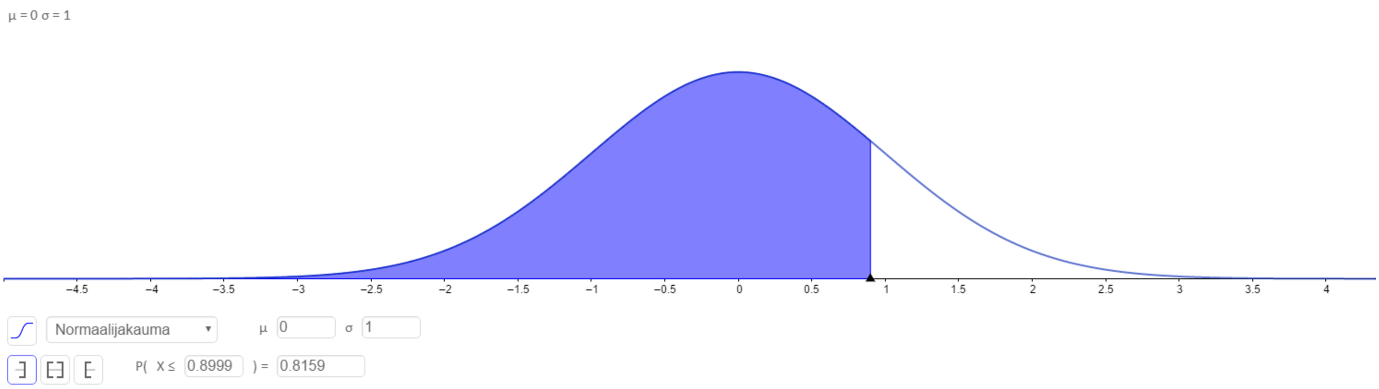
17 m: $z = \frac{17-25}{8} = -1$, 29 m: $z = \frac{29-25}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, 41m: $z = \frac{41-25}{8} = 2$

PB15.3

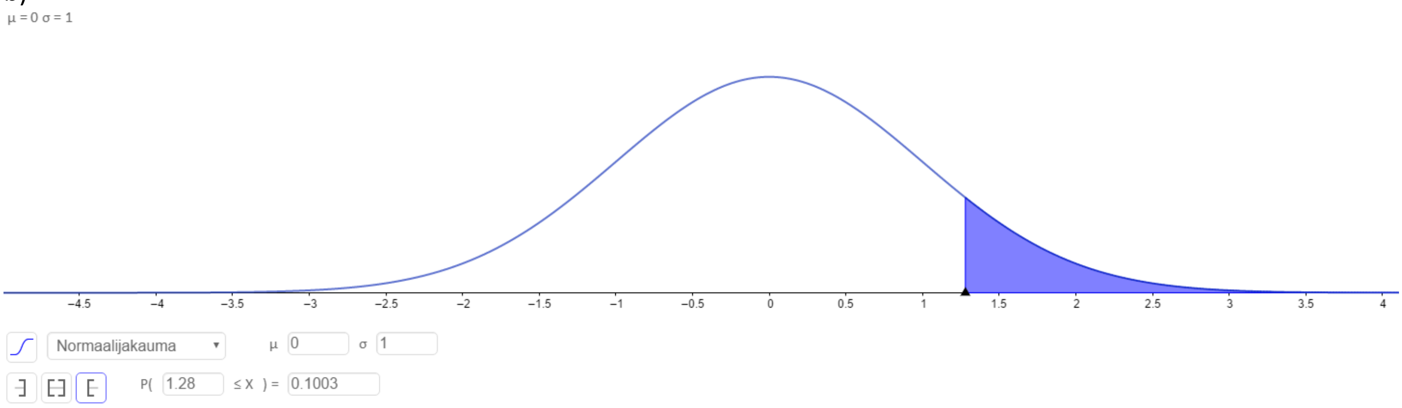
Olkoon $\underline{x} \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Tutki satunnaismuuttujaa vastaavat todennäköisyydet GeoGebran tai taulukkokirjan avulla.

Määritä a) $P(\underline{x} < 0,9)$ b) $P(\underline{x} > 1,28)$ c) $P(\underline{x} < -0,38)$ d) $P(\underline{x} > -0,1)$

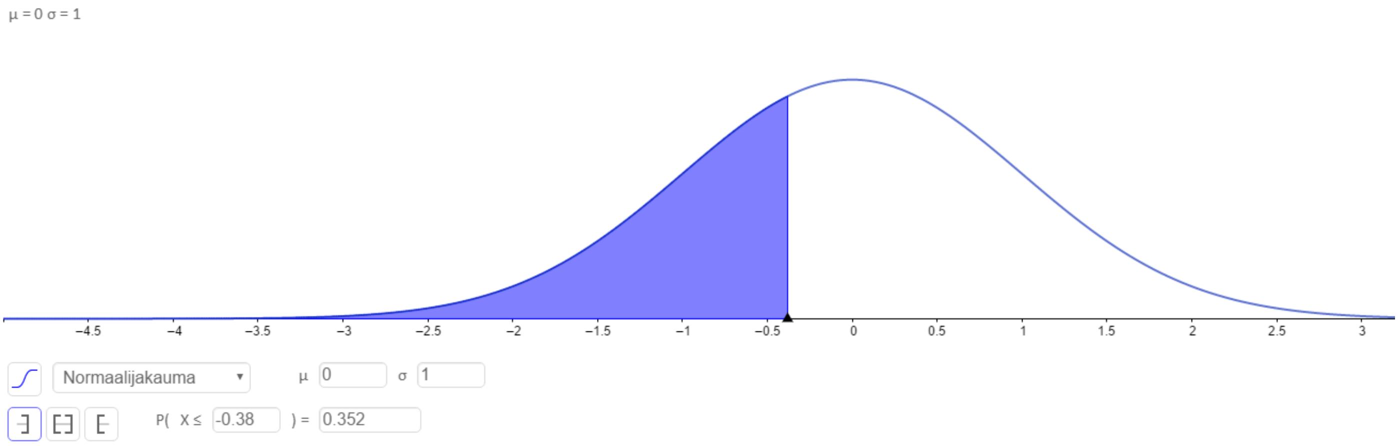
a)



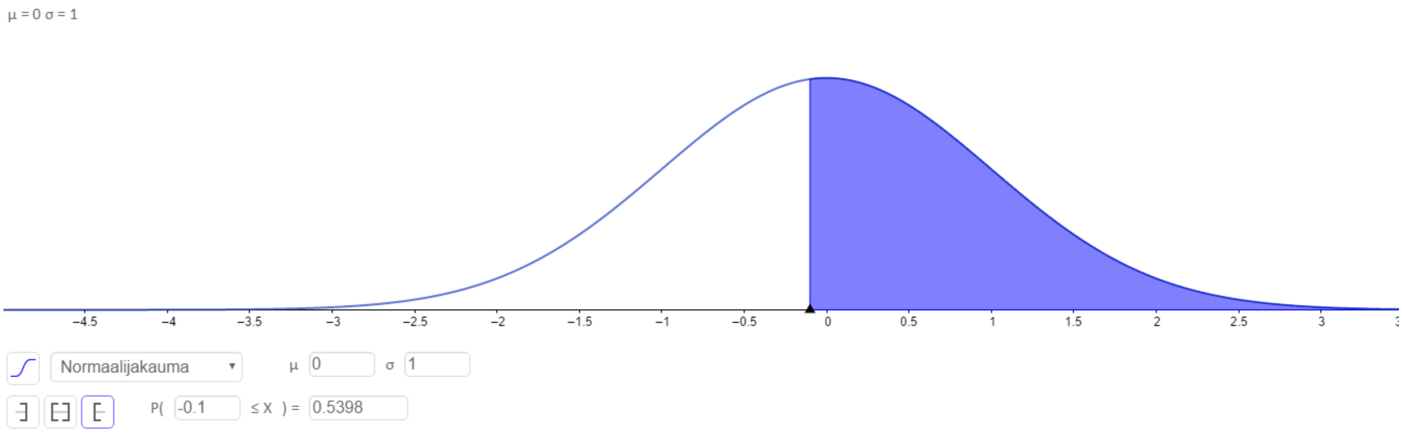
b)



c)


μ = 0 σ = 1
Normaalijakauma
μ 0 σ 1
P(X ≤ -0.38) = 0.352

d)


μ = 0 σ = 1
Normaalijakauma
μ 0 σ 1
P(-0.1 ≤ X) = 0.5398

PB15.4

Olkoon $\underline{x} \sim \mathrm{N}(3, 2)$.

Normita ja määritä todennäköisyydet taulukkokirjan tai laskimen avulla

a) $P(\underline{x} < 3,5)$ b) $P(\underline{x} > 4)$ c) $P(\underline{x} < 2)$ d) $P(\underline{x} > 2)$.

a) $z = \dfrac{3{,}5 - 3}{2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

$$P(\underline{x} < 3{,}5) = P(\underline{z} \leq 0{,}25) = \Phi(0{,}25) = 0{,}5987$$

b) $z = \dfrac{4 - 3}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

$$P(\underline{x} > 4) = P(\underline{z} > 0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

c) $z = \dfrac{2 - 3}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

$$P(\underline{x} < 2) = P(\underline{z} < -0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

d) $P(\underline{x} > 2) = P(\underline{z} > -0{,}5) = 1 - \Phi(-0{,}5) = 1 - (1 - \Phi(0{,}5)) = \Phi(0{,}5) = 0{,}6915$

PB15.5

Erään ryhmän opiskelijoiden pituudet noudattavat normaalijakaumaa. Pituuksien keskiarvo on 168 cm ja keskihajonta 4 cm. Laske todennäköisyys taulukkolaskentaohjelmalla sille, että satunnaisesti valitun oppilaan pituus on

a) alle 178 cm

b) yli 176 cm

c) alle 166 cm

d) välillä 166 cm – 176 cm.

	ka	kh	<	sat.m.		P	funktio
a)	168	4	<	178		**0,9938**	norm.jakauma
b)	168	4	>	176		**0,0228**	1-norm.jakauma
c)	168	4	<	166		**0,0880**	norm.jakauma
d)	168	4	välillä	166	176	**0,8892**	F7-E7
				0,088016332	0,977249868		
				norm.jakaum	norm.jakauma		

PB15.6

Erääseen ensisynnyttäjien seulontaryhmään kuului 710 odottavaa naista ja he olivat iältään 15 – 46 -vuotiaita. Naisten keski-ikä oli 26 v ja keskihajonta 6 vuotta sekä otos on normaalisti jakautunut.

a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu nainen on alle 30 vuotias?

b) Minkä ikäisiä ovat vanhimmat 25 % ensisynnyttäjistä?

a)

$P(\underline{x} \leq 30) =$

Normitetaan $z = \dfrac{30-25,1}{5,8} \approx 0,8448$

Taulukkokirjan mukaan

$P(\underline{z} \leq 0,8448) =$ 0,8009 eli noin 80%:n todennäköisyydellä.

b)

Siis

$$P(\underline{x} > x_1) = 1 - \Phi(\frac{x_1 - 26}{6}) = 1 - 0{,}7500 = 0{,}2500$$

eli

$$\Phi(\frac{x_1 - 26}{6}) = 0{,}7500$$

Taulukkokirjan mukaan todennäköisyyttä 0,7500 vastaa arvo: 0,675

Siis $\dfrac{x_1 - 26}{6} = 0{,}675$

$$x_1 = 6 \cdot 0{,}675 + 26 = 30{,}05$$

Vanhimmat 25 % ovat yli 30 vuotiaita.

PB15.7

Valmistajan tarkistusmittauksissa todettiin, että hajuvesipullon sisällön määrä noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 52 millilitraa ja keskihajonta on 1,25 millilitraa. Millä todennäköisyydellä hajuvesipullon sisältö on alle 50 millilitraa? (k2013/8)

Nyt $\underline{x} \sim \mathrm{N}(52; 1,25)$

$$P(\underline{x} < 50) = P\left(\underline{z} < \frac{50-52,5}{1,25}\right) = \Phi(-1.6) = 0.0548$$

Vastaus: Hajuvesipullon sisältö on alle 50 millilitraa noin 5,5 %:n todennäköisyydellä.

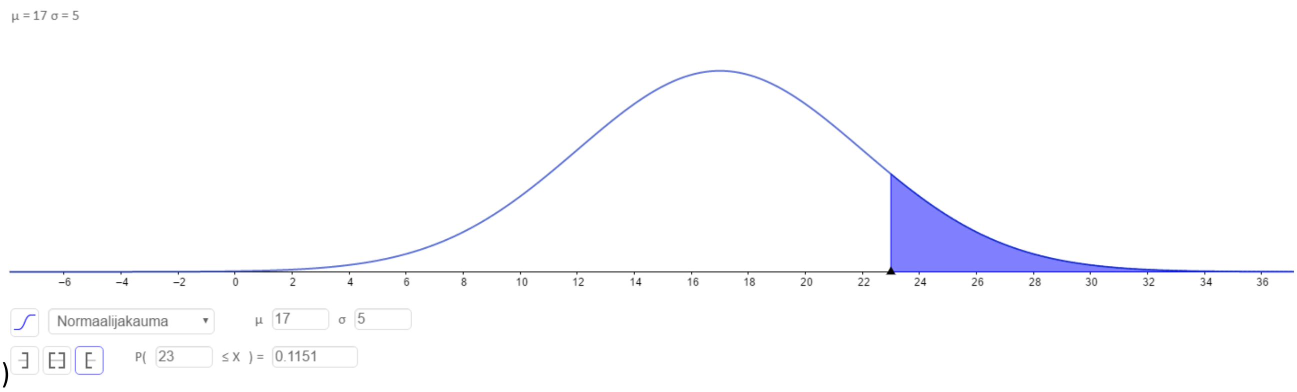
SB15.8

Ruokamittoja kirjassa (https://www.julkari.fi/bitstream/handle/10024/103051/2004b15.pdf?sequence=1) ilmoitetaan kuivattujen viikunoiden keskikooksi noin 17 g, mikä on myös kuivattujen viikunoiden keskiarvo. Oletetaan, että kuivattujen viikunoiden paino on normaalisti jakautunut ja keskihajonta on 5 g. Eräänä päivänä hedelmätilalla tuotettiin noin 100000 kuivattua viikunaa.

a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kuivattu viikuna on yli 23 grammaa?

b) Kuinka monta yli 23 grammaa olevia kuivattuja viikunoita on 100000:n otoksessa?

c) Kuinka monta kuivattua viikunaa on 100000:n otoksessa välillä 16 g – 23g?



a)

b)

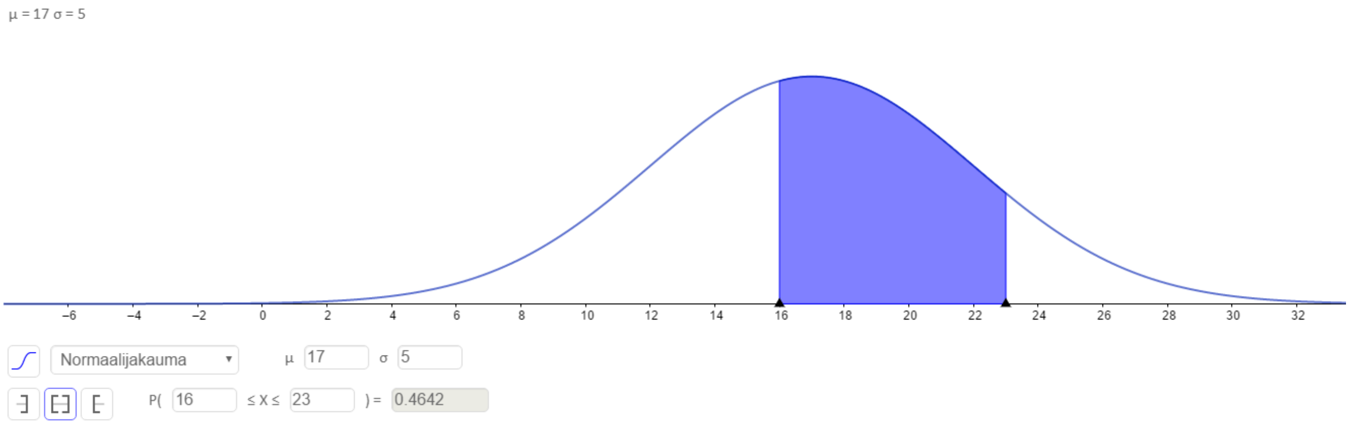
$$\frac{11.51}{100}*100000$$

$$11510$$

–

Vastaus: Siis noin 11500 kappaletta.

c)



$$\frac{46.42}{100}*100000$$

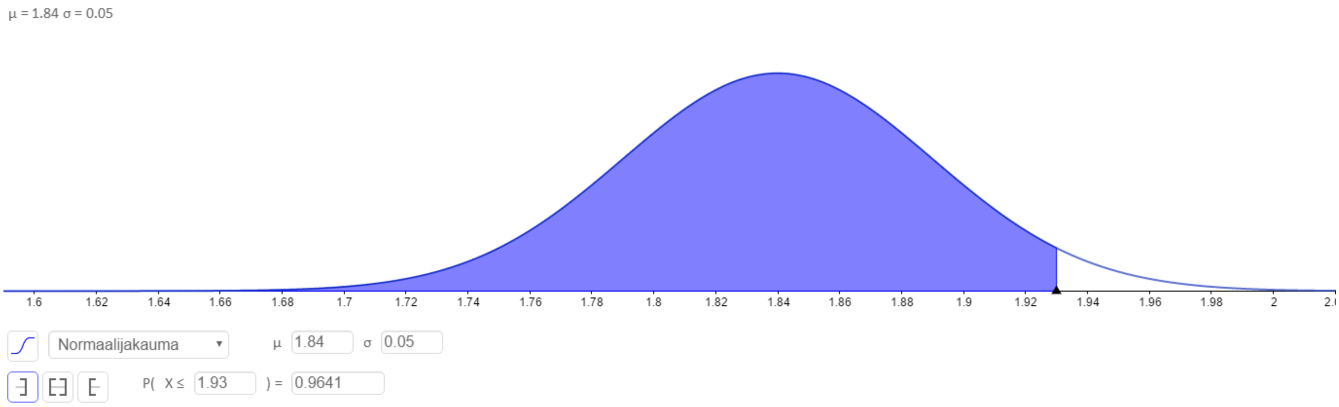
$$46420$$

.

Siis noin 46400 kappaletta

SB15.9

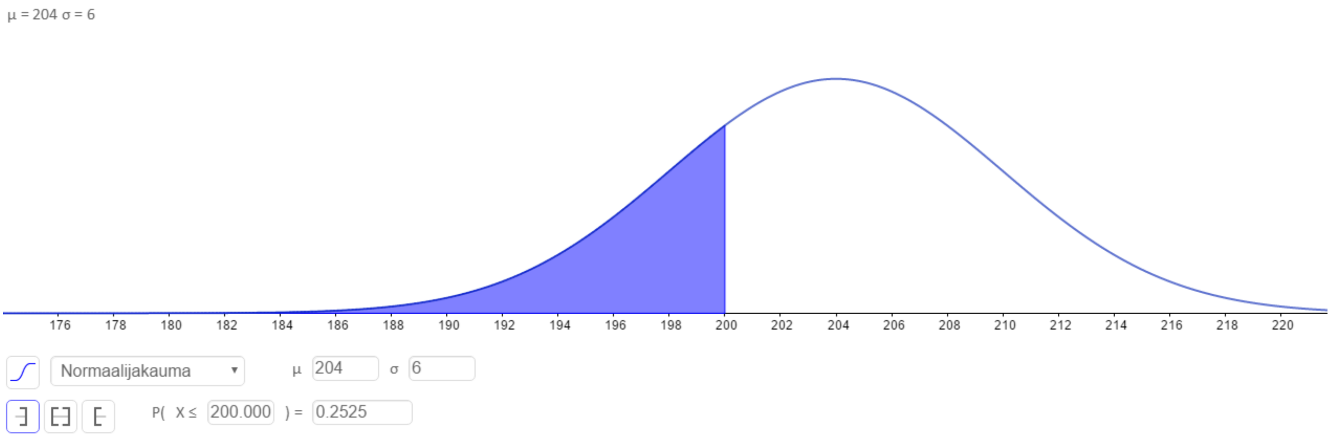
Eräässä tehtaassa valmistettavien kirjekuorien painojen jakautumista kuvaa normaali jakauma, jonka odotusarvo μ on 1,84 g ja keskihajonta $\sigma = 0,05$ g. Mikä on todennäköisyys sille, että kuoren paino on alle 1,93 g? (k1985/5b)



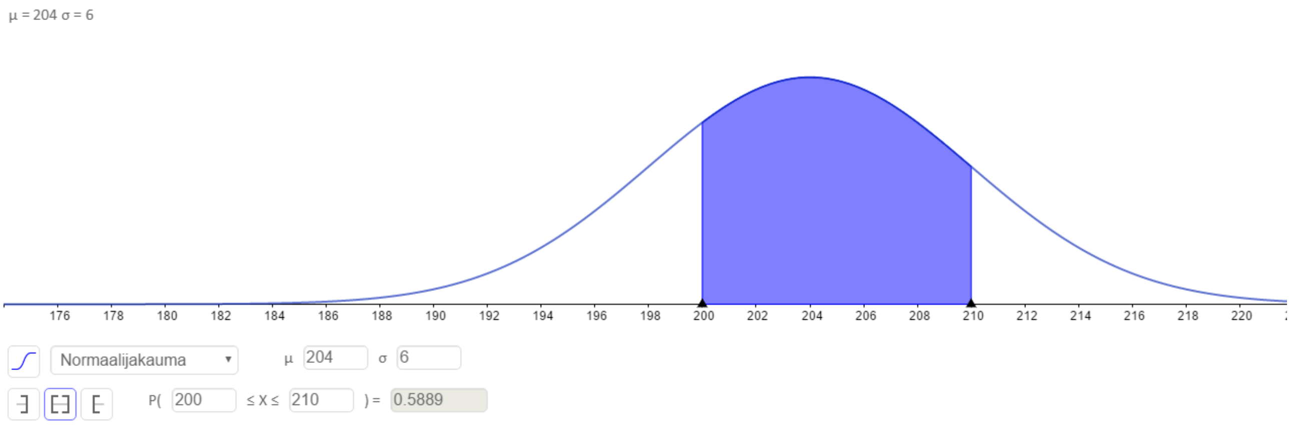
Vastaus: Kuoren paino on alle 1,93 g noin 94 %:n todennäköisyydellä.

SB15.10

Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g? (K2001/7)



Siis pakkauksista massa oli alle 200 g noin 25,3 %:lla.



Joten pakkauksista massa oli välillä 200 g – 210 g noin 58,9 %:lla.

SB15.11

Heikki kasvatti kirjolohia altaassa. Kuuden kuukauden kasvatusjakson jälkeen Heikki koepyydysti rysällä n kappaletta kirjolohia ja laski niiden keskipainoksi 900 g. Heikki tuumasi, että kirjolohien paino noudattaa normaalijakaumaa. Mikä pitäisi kirjolohien painon keskihajonnan olla, jotta satunnaisesti valittu kirjolohi on alle 1000 grammaa 85 %:n todennäköisyydellä? Tutki mallia taulukkolaskentaohjelmalla.

Taulukoinnin alkupäässä:

B	C	D	E
x	s	otos	P
900	1	1000	1
900	2	1000	1
900	3	1000	1
900	4	1000	1
900	5	1000	1
900	6	1000	1
900	7	1000	1

85 %:n todennäköisyys löytyy keskihajonnalla 96 – 97 grammaa.

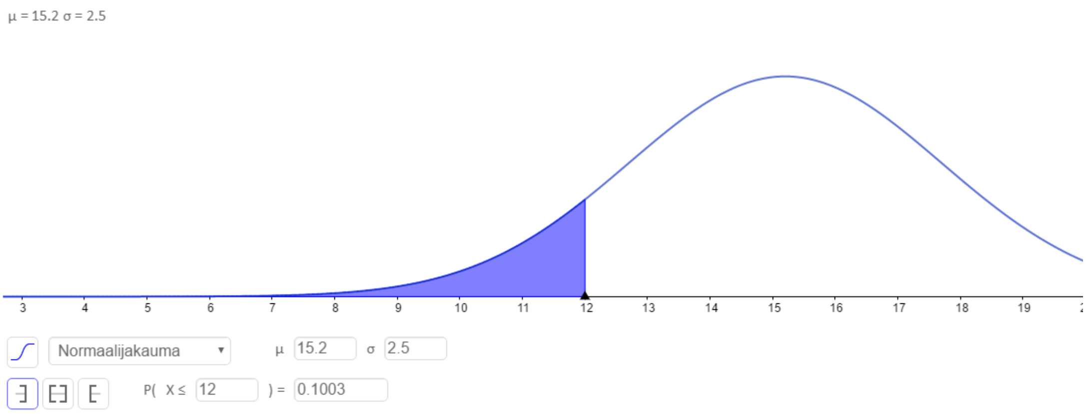
900	94	1000	0,856297093
900	95	1000	0,853745061
900	96	1000	0,851216876
900	97	1000	0,848712669
900	98	1000	0,846232538
900	99	1000	0,843776551

SB15.12

Hiustenkuivaaja toimii vioittumatta ajan, joka on normaalijakautunut odotusarvona 15,2 kuukautta ja keskihajontana 2,5 kuukautta. Kuivaajalla on yhden vuoden takuu. a) Kuinka monta prosenttia kuivaajista joutuu takuukorjaukseen? b) Kuinka monta prosenttia kuivaajista toimii vioittumatta yli 18 kuukautta?

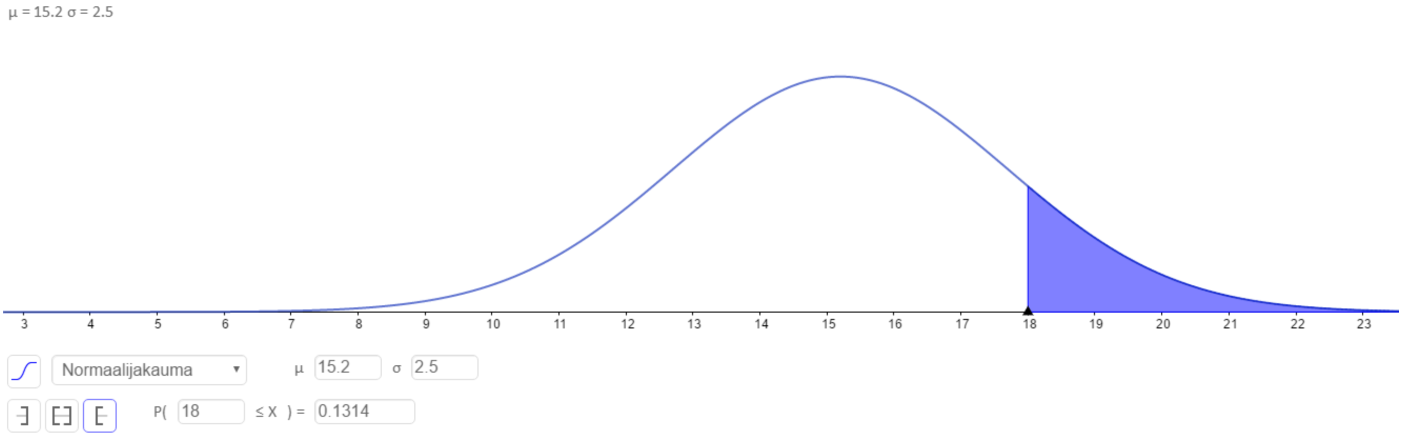
(k2015/13)

a)



Takuukorjaukseen joutuu noin 10 % hiustenkuivaajista.

b)

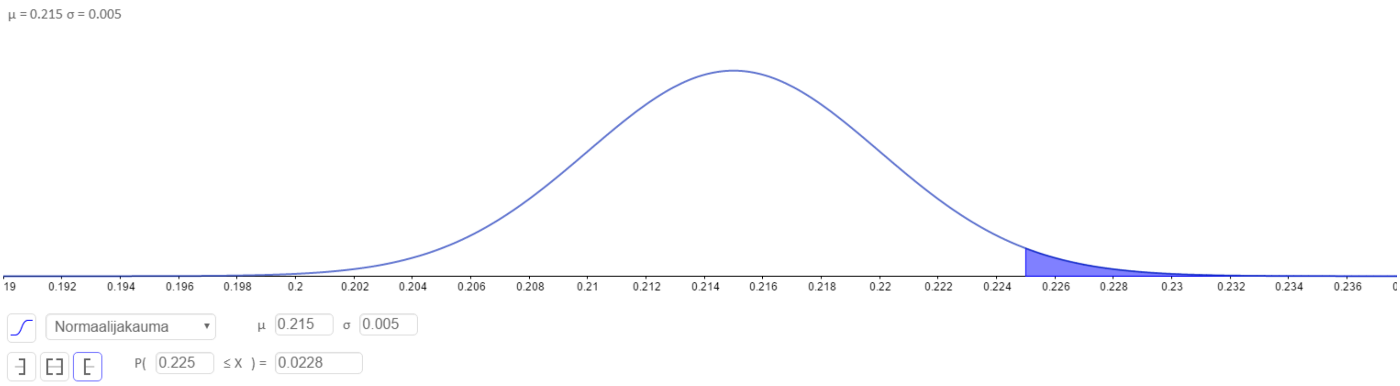


Kuivaajista toimii vioittumatta yli 18 kuukautta noin 13 %.

SB15.13

Eräässä tutkimuksessa mitattiin tiettyä lisäainepitoisuutta sadassa pullollisessa virvoitus- juomaa. Pitoisuuden keskiarvoksi saatiin x = 0,215 % ja keskihajonnaksi s = 0,005 %. Lisäainepitoisuus noudattaa normaalijakaumaa. Millä todennäköisyydellä lisäaineen pitoisuus pullossa ylittää sallitun rajan 0,225 %?

(s2012/14)



Pitoisuus pullossa ylittää sallitun rajan 0,225 % noin 2,3 %:n todennäköisyydellä.

SB15.14

Pussituskonetta säätämällä pussin keskisisältö voidaan valita väliltä 300 g ... 500 g. Mittausten mukaan sisällön massa on tällöin normaalisti jakautunut hajonnan ollessa 15 g. Miten suureksi pussin keskisisältö olisi säädettävä, kun vaaditaan, että pussin sisältö on 95 prosentin todennäköisyydellä yli 400 g ? (k1991/7)

Taulukkolaskentaohjelmalla:

satm.	x	s	kertymä	95 %:n tn tehtävänannon muk.
400	350	15	0,99957094	0,00042906
400	351	15	0,999455891	0,000544109
400	352	15	0,999312862	0,000687138
400	353	15	0,999135835	0,000864165
400	354	15	0,9989177	0,0010823
400	355	15	0,998650102	0,001349898
400	356	15	0,998323282	0,001676718
400	357	15	0,997925902	0,002074098

...

400	419	15	0,102637252	0,897362748
400	420	15	0,09121122	0,90878878
400	421	15	0,080756659	0,919243341
400	422	15	0,071233377	0,928766623
400	423	15	0,062596873	0,937403127
400	424	15	0,054799292	0,945200708
400	425	15	0,047790352	0,952209648
400	426	15	0,04151822	0,95848178
400	427	15	0,035930319	0,964069681
400	428	15	0,030974076	0,969025924
400	429	15	0,026597574	0,973402426

Vastaus: Pussin keskisisältö on asetettava ainakin arvoon 425 g.

SB15.15

Oletetaan, että paperin pinta-alamassa (g/m2) on normaalijakautunut. Asiakas tilaa paperia, jonka pinta-alamassa on keskimäärin 80 g/m2. Kuinka suuri hajonta saa pintapainossa enintään olla, jotta todennäköisyys saada alle 75 g/m2 painavaa paperia olisi pienempi kuin 5 %? (s1996/8)

Taulukkolaskentaohjelmalla:

satm.	x	s	kertymä
75	80	0,1	0
75	80	0,2	3,0567E-138
75	80	0,3	1,14507E-62
75	80	0,4	3,73256E-36
75	80	0,5	7,61985E-24
75	80	0,6	3,92987E-17
75	80	0,7	4,57053E-13
75	80	0,8	2,05226E-10
75	80	0,9	1,38365E-08
75	80	1	2,86652E-07
75	80	1,1	2,74084E-06
75	80	1,2	1,54543E-05
75	80	1,3	5,99932E-05
75	80	1,4	0,00017752
75	80	1,5	0,00042906
75	80	1,6	0,000889025
75	80	1,7	0,001634841
75	80	1,8	0,002736602
75	80	1,9	0,004249456
75	80	2	0,006209665
75	80	2,1	0,008633972
75	80	2,2	0,01152131
75	80	2,3	0,014855833
75	80	2,4	0,018610425
75	80	2,5	0,022750132
75	80	2,6	0,027235195
75	80	2,7	0,03202355
75	80	2,8	0,037072766
75	80	2,9	0,042341473
75	80	3	0,047790352
75	80	3,1	0,053382767
75	80	3,2	0,059085123
75	80	3,3	0,064867019
75	80	3,4	0,070701254
75	80	3,5	0,076563726
75	80	3,6	0,08243327

Siis hajonta saa pintapainossa enintään olla 3 g/m2.

SB15.16

Kahvilassa on espressoautomaatti, jota voidaan säätää valmistamaan 1 - 2 dl espressoannoksia. Automaatin espressoannosten keskihajonta on 0,03 dl ja annoskoko on normaalisti jakautunut. Tutki taulukkolaskentaohjelmalla Mikä pitäisi keskiannokseksi säätää, jotta 95 %:n todennäköisyydellä espressoautomaatti tekee vähintään 1,1 dl espressoannoksen?

satm	x	s	kertymä	tn
1,1	1	0,03	0,99957094	0,00042906
1,1	1,01	0,03	0,998650102	0,001349898
1,1	1,02	0,03	0,996169619	0,003830381
1,1	1,03	0,03	0,990184671	0,009815329
1,1	1,04	0,03	0,977249868	0,022750132
1,1	1,05	0,03	0,952209648	0,047790352
1,1	1,06	0,03	0,90878878	0,09121122
1,1	1,07	0,03	0,841344746	0,158655254
1,1	1,08	0,03	0,747507462	0,252492538
1,1	1,09	0,03	0,63055866	0,36944134
1,1	1,1	0,03	0,5	0,5
1,1	1,11	0,03	0,36944134	0,63055866
1,1	1,12	0,03	0,252492538	0,747507462
1,1	1,13	0,03	0,158655254	0,841344746
1,1	1,14	0,03	0,09121122	0,90878878
1,1	1,15	0,03	0,047790352	0,952209648
1,1	1,16	0,03	0,022750132	0,977249868
1,1	1,17	0,03	0,009815329	0,990184671
1,1	1,18	0,03	0,003830381	0,996169619

Vastaus: Keskiannokseksi säätää 1,15 dl, jotta 95 %:n todennäköisyydellä espressoautomaatti tekee vähintään 1,1 dl espressoannoksen.

SB15.17

Yritys valmistaa pallon muotoisia kaasusäiliöitä, joiden tilavuuden on tarkoitus olla 5000 litraa. Enintään 65 litran poikkeama jompaankumpaan suuntaan hyväksytään. Laske tavoitteena oleva säiliön halkaisija ja virherajojen mukaiset halkaisijat. Millä todennäköisyydellä valmistusprosessissa syntyy hyväksyttäviä säiliöitä, kun halkaisijoiden poikkeamat tavoitteesta ovat normaalisti jakautuneita parametrein μ = 0 cm, σ = 1, 75 cm? (K2006/8)

Pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, josta $d = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

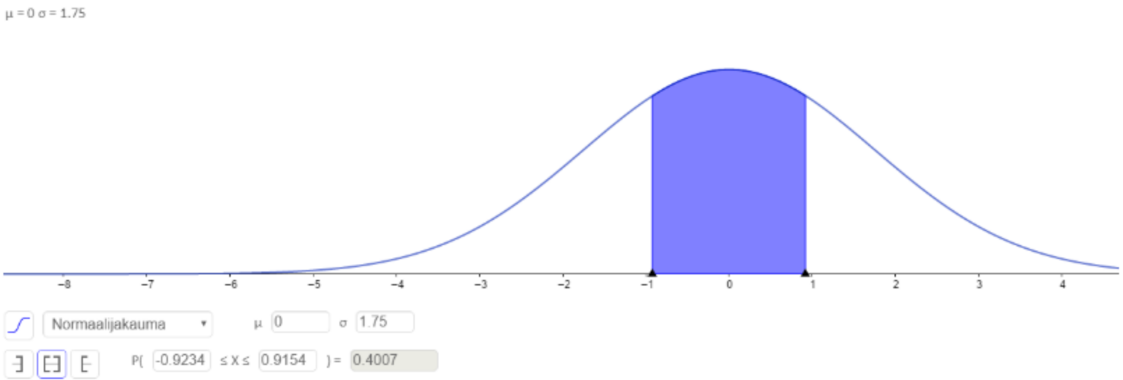
Nyt 5000 l säiliön halkaisija on $d_1 = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5000}{4\pi}} \approx 212{,}157\ cm$

$Ja\ 4935\ l\ säiliön\ halkaisija\ on\ d_2 = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4935}{4\pi}} \approx 211{,}234\ cm$

$Ja\ 5065\ l\ säiliön\ halkaisija\ on\ d_3 = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5065}{4\pi}} \approx 213{,}072\ cm$

$Saadaan\ \Delta d_1 = d_2 - d_1 = -0{,}9234\ cm$

$ja\ \Delta d_2 = d_3 - d_1 = 0{,}9154\ cm$



Vastaus: Halkaisija on siis noin 212,23 cm ja se vaihtelee välillä 211,2 - 213,12 cm. Hyväksyttäviä säiliöitä tehdään siis noin 40 %:n todennäköisyydellä.

SB15.18

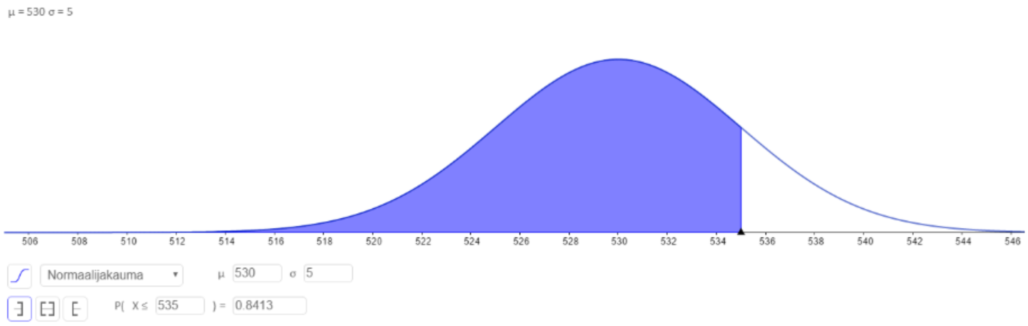
Henkilö lähtee töihin joka aamu autolla samaan aikaan. Hän saapuu työpaikkansa pysäköintialueelle ajankohtana, joka noudattaa normaalijakaumaa. Keskiarvo on klo 8.50 ja hajonta 5 min. Pysäköintialueelta löytyy paikka 65 % todennäköisyydellä, ja sieltä on viiden minuutin kävelymatka työpaikalle. Jos kaikki pysäköintipaikat ovat varattuja, henkilö voi ajaa viidessä minuutissa toiselle alueelle, jolta aina löytyy pysäköintipaikka mutta jolta on 10 minuutin kävelymatka työpaikalle. Mikä on todennäköisyys, että henkilö saapuu työpaikalleen klo 9. 00 jälkeen? (S1996/8b)

Nyt siis tarkastellaan normaalijakaumaa $X \sim N\,(530{,}5)$

Henkilö ehtii töihin ennen klo 9.00:

Pysäköinti alueelle A: Henkilö saapuu töihin ajoissa, jos hän saapuu pysäköintialueelle A ennen 8.55 ja saa pysäköintipaikan tn 0,65.

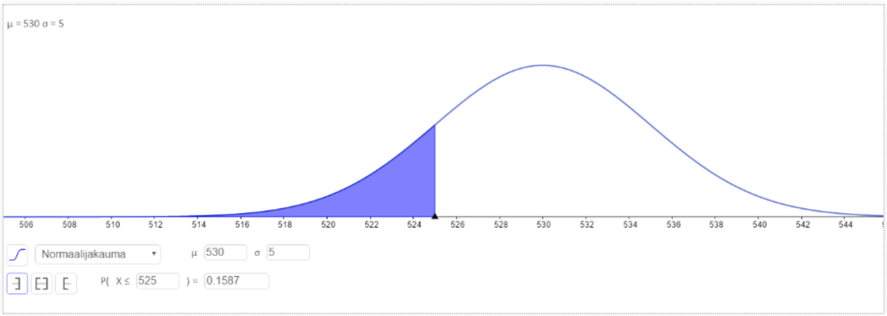
Tämän minuuttiaika on 8.55 = 535



$$P\,(\text{" } henkilö\ on\ töissä\ ennen\ klo\ 9.00\ ja\ saa\ parkeerattua\ alue\ A \text{ "}) = 0{,}8413 \cdot 0{,}65 = 0{,}546845$$

Pysäköinti alueelle B: Henkilö ei saa pysäköintialueelta A pysäköintipaikkaa ennen klo 8.45 tn 0,35 ja silloin hän saa pysäköintialueelta B pysäköintipaikan.

Tämän minuuttiaika on 8.45 = 525



Vähennetään saatu tn 1:stä niin saadaan kysytty tn.

$$P\,(\text{" } henkilö\ on\ töissä\ ennen\ klo\ 9.00\ ja\ saa\ parkeerattua\ alue\ B \text{ "}) = 0{,}1587 \cdot 0{,}35 = 0{,}055545$$

$$P\,(\text{" Henkilösaapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen. "}) = 1 - (0{,}546845 + 0{,}055545) = 0{,}39761$$

Vastaus: Henkilö saapuu työpaikalleen klo 9. 00 jälkeen todennäköisyydellä 39,8 %.