PA16.1

Seuraavassa taulukossa on esitetty 30 varusmiehen pituuksien luokittelu luokkakeskusten mukaisesti.

Varusmiehen pituus [cm]	*Luokkafrekvenssi* [f_i]	*Luokkakeskus* [x_i]	$f_i x_i$
170 – 179	12	$\frac{170+179}{2} = 174\frac{1}{2}$	2094
180 – 189	13	$\frac{180+189}{2} = 184\frac{1}{2}$	$2398\frac{1}{2}$
190 – 199	5	$\frac{190+199}{2} = 194\frac{1}{2}$	$972\frac{1}{2}$
Yhteensä	$n = 30$		5465

Mikä on moodi?

- Mo={13}
- ✔ Mo={184,5}
- Mo={194,5}
- Mo={174,5}

1 / 1

PA16.2

Seuraavassa taulukossa on esitetty 30 varusmiehen pituuksien luokittelu luokkakeskusten mukaisesti.

Varusmiehen pituus [cm]	*Luokkafrekvenssi* [f_i]	*Luokkakeskus* [x_i]	$f_i x_i$
170 – 179	12	$\frac{170+179}{2} = 174\frac{1}{2}$	2094
180 – 189	13	$\frac{180+189}{2} = 184\frac{1}{2}$	$2398\frac{1}{2}$
190 – 199	5	$\frac{190+199}{2} = 194\frac{1}{2}$	$972\frac{1}{2}$
Yhteensä	$n = 30$		5465

Mikä on mediaani?

- Md={13}
- ✔ Md={184,5}
- Md={194,5}
- Md={174,5}

1 / 1

PA16.3

Rasiassa on kuusi palloa, joista kolmessa on numero 1 ja kolmessa numero 2. Rasiasta nostetaan samanaikaisesti kolme palloa. Tällöin saatujen lukujen summa on satunnaismuuttuja. Laadi tämän muuttujan frekvenssitaulukko sekä laske suhteelliset frekvenssit. (k1979 8b)

Kuudesta pallosta voidaan valita kolme palloa $\binom{6}{3} = 20$ eri tavalla.

Satunnaismuuttuja, mikä on kolmen pallon summa $\underline{x}$, voi saada arvot 3, 4, 5 tai 6.

Jos satunnaismuuttujaa vastaava arvo on kolme (3), niin se saadaan $\binom{3}{3} \cdot \binom{3}{0} = 1$ eri tavalla.

Jos satunnaismuuttujaa vastaava arvo on neljä (4), niin se saadaan $\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = 9$ eri tavalla.

Jos satunnaismuuttujaa vastaava arvo on viisi (5), niin se saadaan $\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} = 9$ eri tavalla.

Jos satunnaismuuttujaa vastaava arvo on kuusi (6), niin se saadaan $\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} = 1$ eri tavalla.

$\underline{x}$	f	sf %
3	1	$\frac{1}{20} \cdot 100 = 5$ %
4	9	$\frac{9}{20} \cdot 100 = 45$ %
5	9	$\frac{9}{20} \cdot 100 = 45$ %
6	1	$\frac{1}{20} \cdot 100 = 5$ %

PB16.4

Liitteenä olevassa taulukossa on esitetty Suomessa alkoholijuomien kulutus asukasta kohti 1990-2018 (Taulukko). (https://findikaattori.fi/fi/55 Haettu: 15.1.2020) Tutki taulukkolaskentaohjelman avulla keskiluvut ja keskihajonta alkoholijuomien kulutus asukasta kohti 1990-2018.

Alkoholijuomien kulutus asukasta kohti 1990-2018			
100 %:n alkoholina			
	Tilastoitu kulutus	Tilastoimaton kulutus	Kokonaiskulutus
1990	9,5	1,5	11
1991	9,2	1,6	10,8
1992	8,9	1,4	10,3
1993	8,4	1,6	10
1994	8,2	1,6	9,8
1995	8,3	2,7	11
1996	8,2	2,4	10,6
1997	8,6	2,3	10,9
1998	8,6	2,2	10,8
1999	8,6	2,1	10,7
2000	8,6	2,1	10,7
2001	9	2	11
2002	9,2	2	11,2
2003	9,3	2	11,3
2004	9,9	2,6	12,5
2005	10	2,7	12,7
2006	10,1	2,2	12,3
2007	10,5	2,2	12,7
2008	10,3	2,2	12,5
2009	10	2,3	12,3
2010	9,7	2,3	12
2011	9,8	2,3	12,1
2012	9,3	2,2	11,5
2013	9,1	2,5	11,6
2014	8,8	2,4	11,2
2015	8,5	2,3	10,8
2016	8,4	2,4	10,8
2017	8,4	1,9	10,3
2018	8,4	2	10,4
-/ Terveyden ja hyvinvoinnin laitos (THL)			
Yksikkö: l/15 vuotta täyttänyt asukas			
Lähde: Terveyden ja hyvinvoinnin laitos (THL)			
		keskiarvo	11,23
		mediaani	11
		moodi	10,8
		keskihajonta	0,83

SB16.5

Kultaseppä aikoo ostaa 12 000 markalla joko yhden suuren jalokiven tai kaksi 6 000 mk arvoista pienempää ja hiottaa ostoksensa sitten uudestaan. Uudelleenhionta maksaa tuloksesta riippumatta suuren kiven osalta 1 000 mk ja pienemmän 800 mk sekä nostaa hionnan kestävän kiven arvoa 30 %. Todennäköisyys, että hiottava kivi tuhoutuu sisäisen vian vuoksi, on suurta kiveä käsitellessä 0,1 ja pienempää käsitellessä 0,08. Kannattaako kultasepän ostaa yksi suuri jalokivi vai kaksi pienempää? Tässä kannattavuuden mittana pidetään hionnan jälkeisen varallisuuden odotusarvoa. (K1996/9)

Kaksi pienempää:

Tarkastellaan yhtä pientä jalokiveä:

Kustannukset: $-6000 - 800 = -6800$

$\text{Mahdollinen tuotto}: 6000 \cdot 1{,}3 = 7800$

Kivi menee rikki hionnassa $p_1 = 0{,}08$ kivi kestää $p_2 = 0{,}92$

Mahdollinen tuotto odotusarvon mukaan:

$\mu = 7800 \cdot 0{,}92 - 6800 = 376$

Jos kaksi pientä kiveä, niin $\mu = 2 \cdot 376 = 752$

Yksi suuri:

Kustannukset: $-12000 - 1000 = -13000$

$\text{Mahdollinen tuotto}: 12000 \cdot 1{,}3 = 15600$

Kivi menee rikki hionnassa $p_3 = 0{,}1$ kivi kestää $p_4 = 0{,}9$

Mahdollinen tuotto odotusarvon mukaan:

$\mu = 15600 \cdot 0{,}9 - 13000 = 1040$

Vastaus: Kannattaa siis ostaa yksi isompi kivi.

SB16.6

Laatikossa on kaksi valkoista ja kolme mustaa palloa. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi palloa. Olkoon satunnaismuuttuja X nostossa saatujen mustien pallojen lukumäärä. Laske todennäköisyydet $P(X = k)$, k = 0, 1, 2. Määritä odotusarvo E(X). (S2008/8)

Merkitään V=valkoinen ja M=Musta
Mahdolliset vaihtoehdot ja niiden todennäköisyydet ovat:

$P(\text{" }VV\text{ "}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, mustia palloja on siis 0 kpl.

$P(\text{" }VM\text{ "}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10}$, mustia palloja on siis 1 kpl.

$P(\text{" }MM\text{ "}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, mustia palloja on siis 2 kpl.

Odotusarvo on: $\mu = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = 1{,}2$

I

SB16.7

Monivalintatestissä on 25 väitettä ja kussakin kaksi vastausvaihtoehtoa. Opiskelija tietää oikean vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput. Millä todennäköisyydellä hän läpäisee testin, kun läpipääsyyn vaaditaan 15 oikeaa vastausta? (S2010/6)

n	k	p	Pk		
15	0	0,5	3,05176E-05		
15	1	0,5	0,000457764		
15	2	0,5	0,003204346		
15	3	0,5	0,013885498		
15	4	0,5	0,041656494		
15	5	0,5	0,091644287		
15	6	0,5	0,152740479		
15	7	0,5	0,196380615		
15	8	0,5	0,196380615		**Summa P5-P15**
15	9	0,5	0,152740479		**0,941**
15	10	0,5	0,091644287		
15	11	0,5	0,041656494		
15	12	0,5	0,013885498		
15	13	0,5	0,003204346		
15	14	0,5	0,000457764		
15	15	0,5	3,05176E-05		

Vastaus: Opiskelija läpäisee tentin noin 94 %:n todennäköisyydellä. Halutun todennäköisyyden voi laskea myös komplementtitodennäköisyydellä.

SB16.8

Pakkausautomaatti täyttää kahvipaketteja. Kahvin määrä on normaalijakautunut, keskihajonta on 10 grammaa, mutta odotusarvoa voidaan säätää. Mikä pitäisi säätää odotusarvoksi, kun tavoitteena on valmistaa paketteja, joista enintään 2,0 % sisältää alle 500 grammaa kahvia? Anna vastaus gramman tarkkuudella. (S2014/7)

Taulukoidaan:

x	kh	satm	p
490	10	500	0,841344746
491	10	500	0,815939875
492	10	500	0,788144601

…

518	10	500	0,035930319
519	10	500	0,02871656
520	10	500	0,022750132
521	10	500	0,017864421
522	10	500	0,013903448
523	10	500	0,01072411

Siis keskiarvon tulee olla vähintään 521 grammaa.

SB16.9

Säännöllisen tetraedrin muotoista noppaa heittämällä voi saada silmäluvuksi 1, 2, 3 tai 4. Nämä ovat kaikki yhtä todennäköisiä. Pelaaja heittää yhtä aikaa tetraedrin muotoista ja tavallista noppaa ja laskee silmälukujen summan. a) Määritä kaikkien mahdollisten silmälukujen summien todennäköisyydet. b) Määritä silmälukujen summan odotusarvo. (K2014/7)

Tav. Arpakuu	1	2	3	4	5	6
Tetranoppa						
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Summa	f	p	
2	1	0,041666667	1/24
3	2	0,083333333	2/24
4	3	0,125	3/24
5	4	0,166666667	4/24
6	4	0,166666667	4/24
7	4	0,166666667	4/24
8	3	0,125	3/24
9	2	0,083333333	2/24
10	1	0,041666667	1/24
yhteensä	24		

b)

$$\mu = \frac{1}{24}\cdot 2 + \frac{2}{24}\cdot 3 + \frac{3}{24}\cdot 4 + \frac{4}{24}\cdot 5 + \frac{4}{24}\cdot 6 + \frac{4}{24}\cdot 7 + \frac{3}{24}\cdot 8 + \frac{2}{24}\cdot 9 + \frac{1}{24}\cdot 10 = \frac{144}{24} = 6$$

SB16.10

Oletetaan, että väestön älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa N(100, 15). Määritä odotusarvon 100 ympäriltä symmetrinen väli, johon kuuluu täsmälleen puolet väestöstä. (K2015/6)

Siis $P(-a \leq \underline{x} \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1 = 0{,}5$

$\Phi(a) = 0{,}75$

Taulukkokirjan mukaan $a \approx 0{,}675$

Kun satunnaismuuttuja a normitetaan, niin $\dfrac{x-100}{15} = 0{,}675$

$x = 15 \cdot 0{,}675 + 100 = 110{,}125$

$ja \quad -x = 89{,}875$

Siis väli on $[90,\ 110]$

SB16.11

Kiireisellä professorilla on yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä, mutta hän ehtii pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä. a) Millä todennäköisyydellä hän ehtii pitää viikon kaikki luennot? b) Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä? c) Määritä viikossa pidettyjen luentojen lukumäärän odotusarvo. (S2012/8)

a) Professori ehtii pitää 5 luentoa: $P(A) = 0{,}8^5 = 0{,}32768$

b) Professori pitää 4 luentoa: $P(B) = \binom{5}{4} 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}4096$

c) Professori pitää 3 luentoa: $P(B) = \binom{5}{3} 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048$

Professori pitää 2 luentoa: $P(B) = \binom{5}{2} 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$

Professori pitää 1 luentoa: $P(B) = \binom{5}{1} 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064$

Professori pitää 0 luentoa: $P(B) = 0{,}2^5 = 0{,}00032$

Nyt odotusarvo luennoille viikossa on:

$$\mu = 0 \cdot 00032 + 1 \cdot 0{,}0064 + 2 \cdot 0{,}0512 + 3 \cdot 0{,}2048 + 4 \cdot 0{,}4096 + 5 \cdot 0{,}32768 = 4$$

SB16.12

Aapo ja Juho sopivat matematiikanluokan liitutaulun pyyhkimisestä. Juho ehdottaa ratkaisuksi peliä: Aapon tulee päättää etukäteen luku n ja heittää sitten taikalanttia (Kruunan todennäköisyys taikalanttia heitettäessä on Aapon tutkimusten mukaan tasan 45 %.) n kertaa siten, että heittosarjassa on täsmälleen kaksi kruunaa. Mikäli Aapo onnistuu, Juho joutuu pyyhkimään taulun. Jos Aapo ei onnistu, hän joutuu pyyhkimään taulun.Mikä luku n Aapon kannattaa valita? Mikä voittotodennäköisyys Aapolla on tällöin?

b) Aapo aavistelee todennäköisyyksien olevan häntä vastaan ja ehdottaa sääntöihin muutosta: Pelin säännöt pysyvät muuten samoina, mutta mikäli Aapo heittää valitsemallaan n:llä heitolla täsmälleen yhden kruunan, hän saa vielä yhden lisäheiton. Jos hän saa toisen kruunansa tällä lisäheitolla, hän voittaa. Mikä on nyt paras valinta n:n arvoksi? Kumpi todennäköisesti joutuu pyyhkimään taulun? (Aapo häviää siis jos heittää valitsemillaan n:llä heitolla nolla tai yli kaksi kruunaa tai heittää ensin yhden kruunan ja sitten klaavan lisäheitollaan)

Merkitään todennäköisyyksiä yksittäiselle taikalantin heitolle:

$$P\left(heitto\ on\ kruuna\right) = p = 0,45 = \frac{9}{20}$$

$$P\left(heitto\ on\ klaava\right) = q = 1 - p = \frac{11}{20}$$

Todennäköisyys, että heitetään täsmälleen kaksi kruunaa on:

$$P\left(n\right) = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{n-2} =$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2!(n-2)!} \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{n-2} =$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{n-2} = \frac{81}{800} \cdot (n^2 - n) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{n-2}$$

Kyseessä on diskreetti funktio, nvoi saada vain positiivisia kokonaislukuarvoja. Siispä sitä ei voi esimerkiksi derivoida. Muodostetaan kuitenkin sen pohjalta kaikkialla reaaliluvuissa määritelty jatkuva ja derivoituva funktio:

Olkoon $f\left(x\right) = \frac{81}{800} \cdot (x^2 - x) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}$

Tutkimalla funktion $f(x)$ käyttäytymistä saadaan tietoa myös todennäköisyyden muuttumisesta heittojen määrän muuttuessa. Tutkitaan funktion derivaattaa: $f'\left(x\right) = \frac{81}{800} \cdot \left[D(x^2 - x) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}\right]$

Positiivinen vakiokerroin ei vaikuta tehtävän kannalta oleellisesti funktion käyttäytymiseen, vain sen kasvamisen ja vähenemisen dramaattisuuteen. Tutkitaan siis pelkästään hakasulkeiden sisällä olevaa lauseketta.

Olkoon $g\left(x\right) = (x^2 - x) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}$ $g'(x) = \left[D(x^2 - x) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}\right] = (2x-1) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + (x^2 - x) \cdot \left[D\left(e^{\ln\frac{11}{20}}\right)^{x-2}\right] =$

$$(2x-1) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + (x^2 - x) \cdot \left[De^{\ln\frac{11}{20} \cdot x - 2 \cdot \ln\frac{11}{20}}\right] = (2x-1) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + (x^2 - x) \cdot \ln\frac{11}{20} \cdot \left(e^{\ln\frac{11}{20} \cdot x - 2 \cdot \ln\frac{11}{20}}\right) =$$

$$(2x-1) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + (x^2 - x) \cdot \ln\frac{11}{20} \cdot \left(e^{\ln\frac{11}{20}}\right)^{x-2} = (2x-1) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + (x^2 - x) \cdot \ln\frac{11}{20} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} =$$

$$\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left((2x-1) + (x^2 - x) \cdot \ln\frac{11}{20}\right) = \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + 2x - 1 - \ln\frac{11}{20} \cdot x\right) =$$

$$\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 - \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x - 1\right)$$

Etsitään nyt derivaatan nollakohdat. Tekijällä $\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}$ on aina positiivinen, eli sillä ei ole nollakohtaa, joten muun lausekkeen tarkastelu riittää.

$\ln\frac{11}{20}\cdot x^2+\left(2-\ln\frac{11}{20}\right)\cdot x-1=0$

$\Rightarrow x=\frac{\ln\frac{11}{20}-2\pm\sqrt{\left(2-\ln\frac{11}{20}\right)^2+4\cdot\ln\frac{11}{20}}}{2\cdot\ln\frac{11}{20}}=\frac{\ln\frac{11}{20}-2\pm\sqrt{4-4\cdot\ln\frac{11}{20}-\left(\ln\frac{11}{20}\right)^2+4\cdot\ln\frac{11}{20}}}{2\cdot\ln\frac{11}{20}}x=\frac{\ln\frac{11}{20}-2\pm\sqrt{4-\left(\ln\frac{11}{20}\right)^2}}{2\cdot\ln\frac{11}{20}}$

Laskimella saadaan likiarvot: $x\approx 0,57647...\quad\vee\quad x\approx 3,76889...$

Funktion derivaatan merkki määräytyy lausekkeesta $\ln\frac{11}{20}\cdot x^2+\left(2-\ln\frac{11}{20}\right)\cdot x-1$. Koska $\ln\frac{11}{20}<0$, on kyseessä alaspäin aukeava paraabeli. Alkuperäinen funktio on siis kasvava derivaatan nollakohtien välissä, eli kun $0,57647...\leqslant x\leqslant 3,76889...$, kaikkialla muualla se on vähenevä. Funktiolla on siis maksimi kohdassa $x=3,76889...$

Todennäköisyys saada kaksi kruunaa on siis suurimmillaan joko kolmella tai neljällä heitolla. Kokeillaan sijoittamalla:

$P(3)=3\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{20}\right)\approx 0,334$

$P(4)=6\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^2\approx 0,368$

Aapon kannattaa siis heittää taikalanttia neljä kertaa.

b) Onnistuminen uusilla säännöillä tarkoittaa tilannetta, että alun perin valituilla heitoilla on saatu täsmälleen kaksi kruunaa tai täsmälleen yksi kruuna ja lisäheitolla on saatu kruuna.

$P_{\text{onnistuminen uusilla säännöillä}}(n)=P_{\text{kaksi kruunaa}}(n)+P_{\text{yksi kruuna ja kruuna lisäheitolla}}(n)=$

$\left[\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-2}\right]+\left[\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^1\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{9}{20}\right)\right]$

$=\left[\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-2}\right]+\left[\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}\right]=$

$\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left[\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-2}+\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}\right]=\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left[\frac{n^2-n}{2!}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-2}+n\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}\right]$ Muodostetaan taas todennäköisyysfunktion pohjalta kaikkialla reaaliluvuissa määritelty jatkuva ja derivoituva funktio.

Olkoon $f(x)=\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left[\frac{x^2-x}{2!}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}+x\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{x-1}\right]=\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left[\frac{x^2-x}{2}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}+\left(\frac{11}{20}\right)\cdot x\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}\right]=$

$\left(\frac{9}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left[(x^2-x)\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}+\left(\frac{11}{10}\right)\cdot x\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}\right]$

Tutkitaan funktion derivaattaa. Hakasulkeita edeltävä vakiokerroin ei vaikuta oleellisesti funktion käyttäytymiseen, joten jätetään se huomiotta: Olkoon $g(x) = (x^2 - x) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + \left(\frac{11}{10}\right) \cdot x \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}$ $g'(x) =$

$$\left[\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 - \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x - 1\right)\right] + \left(\frac{11}{10}\right) \cdot \left[D\left(x \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}\right)\right]$$

Huomaa, ensimmäinen termi lausekkeessa on sama kuin a-osassa, jolloin sen derivaatta voidaan poimia suoraan.

$$\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 - \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x - 1\right) + \left(\frac{11}{10}\right) \cdot \left[\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + x \cdot \ln\frac{11}{20} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2}\right] =$$

$$\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 - \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x - 1\right) + \left(\frac{11}{10}\right) \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} + \left(\frac{11}{10}\right) \cdot x \cdot \ln\frac{11}{20} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} =$$

$$\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left[\left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 - \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x - 1\right) + \left(\frac{11}{10}\right) + \left(\frac{11}{10}\right) \cdot x \cdot \ln\frac{11}{20}\right] =$$

$$\left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 - \ln\frac{11}{20} + \frac{11}{10} \cdot \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x + \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{11}{20}\right)^{x-2} \cdot \left(\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 + \frac{1}{10} \cdot \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x + \frac{1}{10}\right)$$

Etsitään derivaatan nollakohdat. Ensimmäinen tekijä on aina positiivinen, joten riittää, että tarkastellaan jälkimmäistä tekijää:

$$\ln\frac{11}{20} \cdot x^2 + \left(2 + \frac{1}{10} \cdot \ln\frac{11}{20}\right) \cdot x + \frac{1}{10} = 0$$

Laskimella saadaan juurille likiarvot: $x \approx -0,05074\ldots \quad \vee \quad x \approx 3,2961$

Derivaatan merkki määräytyy kyseisestä tekijästä. Koska tekijä on alaspäin aukeava paraabeli, se on positiivinen nollakohtien välissä. Siispä funktio on tällöin kasvava ja vähenevä kaikkialla muualla. Maksimi löytyy siis derivaatan nollakohdasta $x \approx 3,2961$. Todennäköisyys on siis suurimmillaan joko n:n arvolla 3 tai 4. Kokeillaan sijoittamalla alkuperäiseen lausekkeeseen:

$P_{\text{onnistuminen uusilla säännöillä}}\ (n = 3) \approx 0,518$

$P_{\text{onnistuminen uusilla säännöillä}}\ (n = 4) \approx 0,502$

Aapon kannattaa siis uusilla säännöillä valita n:n arvoksi 3. Aapon todennäköisyys voittoon on yli $0,5$, eli Juho joutuu todennäköisesti pyyhkimään taulun.