Sessio 4 Tehtävä 1 (PA)

Tässä tehtävässä on esitetty muutamia toisen asteen lausekkeita. Valitse sopivin vaihtoehto, mikä kaava on kyseessä. Onko siis kysymys kaavasta $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ vai $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ tai Ei yksikään esitetyistä kaavoista?

1) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

2) $x^2 + 16x + 64 = (x+8)^2$

3) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

4) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

Sessio 4 Tehtävä 4 (PA)

Korota toiseen potenssiin:

a) $(2a-5b)^2$

b) $(x+3y)^2$

c) $(-x+2y)^2$

a) $(2a-5b)^2 = 4a^2 - 20ab + 25b^2$

b) $(x+3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

c) $(-x+2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

Sessio 4 Tehtävä 5 (PA)

Mistä binomin neliöstä ovat seuraavat trinomit?

a) $y^2 + 6y + 9$

b) $x^2 + 10x + 25$

c) $4y^2 + 12xy + 9x^2$

a) $(y+3)^2$

b) $(x+5)^2$

c) $(2x+3y)^2$

Sessio 4 Tehtävä 6 (PA)

Päättele seuraavien binomin neliöiden puuttuvat termit etumerkkeineen. Puuttuva termi on merkitty Π merkillä.

a) $9x^2 + 6x + 1 = (3x\ \Pi\ )^2$

b) $49x^2 + 154x\ \Pi\ = (7x\ \Pi)^2$

c) $9x^2 + 24x\ \Pi\ = (3x\ \Pi)^2$

d) $64x^2 - 112\ \Pi\ = (8x\ \Pi)^2$

a) $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$

b) $49x^2 + 154x + 121 = (7x+11)^2$

c) $9x^2 + 24x + 16 = (3x+4)^2$

d) $64x^2 - 112x + 49 = (8x-7)^2$

Sessio 4 Tehtävä 7 (PA)

Kehitä seuraavat binomin neliöt hyödyntäen Pascalin kolmiota.

a) $(2x-5)^2$

b) $(3x+4)^2$

c) $(x-5)^2$

a) $(2x-5)^2 = 1\cdot(2x)^2\cdot(-5)^0 + 2\cdot(2x)^1\cdot(-5)^1 + 1\cdot(2x)^0\cdot(-5)^2 = \quad 4x^2-20x+25$

b) $(3x+4)^2 = 1\cdot(3x)^2\cdot 4^0 + 2\cdot(3x)^1\cdot 4^1 + 1\cdot(3x)^0\cdot 4^2 = \quad 9x^2+24x+16$

c) $(x-5)^2 = 1\cdot x^2\cdot(-5)^0 + 2\cdot x^1\cdot(-5)^1 + 1\cdot x^0\cdot(-5)^2 = \quad x^2-10x+25$

Sessio 4 Tehtävä 8 (PA)

Mistä binomin kuutiosta ovat seuraavat lausekkeet.

a) $8x^3-12x^2+6x-1$

b) $8x^3-60x^2+150x-125$

a) $8x^3-12x^2+6x-1 = (2x-1)^3$

b) $8x^3-60x^2+150x-125 = (2x-5)^3$

Sessio 4 Tehtävä 9 (PA)

Laske binomin $(a+3b)^3$ kuutio hyödyntäen Pascalin kolmiota.

Kertoimet (1, 3, 3, 1) otetaan Pascalin kolmion neljänneltä riviltä.

$$(a+3b)^3 = 1\cdot a^3\,(3b)^0 + 3\cdot a^2\,(3b)^1 + 3\cdot a^1\,(3b)^2 + 1\cdot a^0\,(3b)^3 =$$

$$a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$$

Sessio 4 Tehtävä 10 (PA)

Sievennä

a) $(2-a)^3$

b) $(2x-5)^3$

a)

$$(2x-5)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot(-5) + 3\cdot 2x\cdot(-5)^2 + (-5)^3 = 8x^3 + 3\cdot 4x^2\cdot(-5) + 3\cdot 2x\cdot 25 - 125 =$$

$$8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$$

b)

$$(2-a)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot a + 3\cdot 2\cdot a^2 - a^3 = 8 - 12a + 6a^2 - a^3$$

Sessio 4 Tehtävä 11 (PA)

Laske binomin kuutiot hyödyntäen Pascalin kolmiota.

a) $2a - b$

b) $x - 1$

a)

Kertoimet (1, 3, 3, 1) otetaan Pascalin kolmion neljänneltä riviltä.

$$(2a-b)^3 = 1 \cdot (2a)^3 (-b)^0 + 3 \cdot (2a)^2 (-b)^1 + 3 \cdot (2a)^1 (-b)^2 + 1 \cdot (2a)^0 (-b)^3 =$$

$$8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$$

b)

Kertoimet (1, 3, 3, 1) otetaan Pascalin kolmion neljänneltä riviltä.

$$(x-1)^3 = 1 \cdot x^3 (-1)^0 + 3 \cdot x^2 (-1)^1 + 3 \cdot x^1 (-1)^2 + 1 \cdot x^0 (-1)^3 =$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Sessio 4 Tehtävä 12 (SB)

Määritä parametri c siten, että trinomi $x^2 - 4x + c$ voidaan esittää binomin neliönä. Esitä myös kyseinen binomi neliönä.

$$x^2 - 4x + c = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + c \ .$$

Ensimmäisen asteen termissä $-2 \cdot 2 \cdot x$ kerroin 2 tulee kaavasta ja x tulee binomin ensimmäisestä termistä. Luvun c täytyy olla siis $2^2 = 4$:

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = (x-2)^2 \ .$$

Vastaus: c:n arvolla 4 voidaan trinomi $x^2 - 4x + c$ esittää binomin neliönä $(x-2)^2$

Sessio 4 Tehtävä 13 (SB)

Määritä parametri c siten, että lauseke $x^3 + 9x^2 + 27x + c$ voidaan esittää binomin kuutiona. Esitä myös kyseinen binomi kuutiona.

Lauseke on ilmeisesti muotoa $(x + b)^3$, koska termillä x^3 ei ole kerrointa. Tutkitaan lauseketta eri b:n arvoilla:

Kun $b = 1$

$(x+1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = \ x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Kun $b = 2$

$(x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = \ x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Kun $b = 3$

$(x+3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 = \ x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

Vastaus: Parametrille c saadaan siis arvoksi 27

Sessio 4 Tehtävä 14

Kehitä $(2x+3)^4$ käyttäen Pascalin kolmiota.

$(2x+3)^4 =$

$1 \cdot (2x)^4 \cdot 3^0 + 4 \cdot (2x)^3 \cdot 3^1 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot (2x)^1 \cdot 3^3 + 1 \cdot (2x)^0 \cdot 3^4 =$

$16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Sessio 4 Tehtävä 15 (SB)

Sievennä $(a-2b)^3$ käyttäen apuna binomin korkeamman potenssin kaavaa, missä on summamerkintä.

$$(a-2b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot (a)^{3-k} \cdot (-2b)^k =$$

$$\binom{3}{0} (a)^{3-0} \cdot (-2b)^0 + \binom{3}{1} (a)^{3-1} \cdot (-2b)^1 + \binom{3}{2} (a)^{3-2} \cdot (-2b)^2 + \binom{3}{3} (a)^{3-3} \cdot (-2b)^3 =$$

Huomaa, että kertoimet $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ ja $\binom{3}{3} = 1$, jotka saadaan siis Pascalin kolmion neljänneltä riviltä.

$$1 \cdot a^3 \cdot (-2)^0 + 3 \cdot a^2 \cdot (-2b)^1 + 3 \cdot a^1 \cdot (-2b)^2 + 1 \cdot a^0 \cdot (-2b)^3 =$$

$$a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 \ .$$

Sessio 4 Tehtävä 16 (SB)

Sievennä $(2-\sqrt{3})^4$.

Korotetaan $(2-\sqrt{3})^4 =$

$$1 \cdot (2)^4 \cdot \sqrt{3}^0 - 4 \cdot (2)^3 \cdot \sqrt{3}^1 + 6 \cdot (2)^2 \cdot \sqrt{3}^2 - 4 \cdot (2)^1 \cdot \sqrt{3}^3 + 1 \cdot (2)^0 \cdot \sqrt{3}^4 =$$

$$16 - 32\sqrt{3} + 72 - 24\sqrt{3} + 9 = \quad 97 - 56\sqrt{3}$$