

Sessio 6 Tehtävä 4 (PA)

Ratkaise vaillinainen toisen asteen yhtälö:

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 7x = 0$

d) $2x^2 - 10x = 0$

a)

$$x^2 - 36 = 0 \quad || + 36$$

$$x^2 = 36 \quad || \sqrt{}$$

$$\text{Eli } x = \pm\sqrt{36}$$

$$\text{Siis } x = \pm 6$$

Tai vaihtoehtoisesti jaetaan summan ja erotuksen tuloksi

$$x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$$

$$\text{Eli } x + 6 = 0 \text{ tai } x - 6 = 0$$

$$\text{Joten } x = -6 \text{ tai } x = 6$$

b)

$$x^2 - 27 = 0 \quad || + 27$$

$$x^2 = 27 \quad || \sqrt{}$$

Siis $x = \pm\sqrt{9 \cdot 3}$ huomaa neliöjuuren laskusäännöt

$$\text{Eli } x = \pm 3\sqrt{3}$$

c)

$x^2 - 7x = 0$ otetaan yhteinen tekijä x ja saatetaan yhtälö tulomuotoon

$$x^2 - 7x = x(x - 7) = 0$$

Tulon nollasäännön perusteella: $x = 0$ tai $x - 7 = 0$

$$\text{Joten } x = 0 \text{ tai } x = 7$$

d)

$$2x^2 - 10x = 2x(x - 5) = 0$$

Tulon nollasäännön perusteella: $2x = 0$ tai $x - 5 = 0$,

joten $x = 0$ tai $x = 5$.

Sessio 6 Tehtävä 5 (PA)

Ratkaise vaillinainen toisen asteen yhtälö:

a) $x^2 = -5x$

b) $2x^2 = x\sqrt{3}$

c) $3x^2 = -x\sqrt{2}$

a)

$$x^2 + 5x = 0$$

$x(x + 5) = 0$ Tulon nollasäännön perusteella:

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 5 = 0 \quad \| - 5$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -5$$

b)

$$2x^2 = x\sqrt{3} \quad \| - x\sqrt{3}$$

$$2x^2 - x\sqrt{3} = 0$$

$$x(2x - \sqrt{3}) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - \sqrt{3} = 0 \quad \| + \sqrt{3}$$

$$2x = \sqrt{3} \quad \| : 2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)

$$3x^2 = -x\sqrt{2} \quad || + x\sqrt{2}$$

$$3x^2 + x\sqrt{2} = 0$$

$$x(3x + \sqrt{2}) = 0$$

Tulon nollosäännön nojalla

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x + \sqrt{2} = 0 \quad || - \sqrt{2}$$

$$3x = -\sqrt{2} \quad || : 3$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Vastaus: } x = 0 \text{ tai } x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Sessio 6 Tehtävä 6 (PA)

Ratkaise vaillinainen toisen asteen yhtälö reaalilukujen joukossa:

a) $x^2 + 2x = 0$

b) $2x^2 - 6x = 0$

c) $-x^2 + 7x = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

a)

$$x^2 + 2x = 0$$

Otetaan yhteinen tekijä

$$x(x + 2) = 0$$

Tulon nollasäännön nojalla

$$x + 2 = 0 \quad || -2 \quad \text{tai} \quad x = 0$$

$$x = -2$$

Vastaus: $x = -2$ tai $x = 0$

b)

$$2x^2 - 6x = 0$$

Otetaan yhteinen tekijä:

$$2x(x - 3) = 0$$

Tulon nollasäännön perusteella

$$2x = 0 \quad || :2 \quad \text{tai} \quad x - 3 = 0 \quad || +3$$

$$x = 0 \qquad \qquad \qquad x = 3$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 3$

c)

$$-x^2 + 7x = 0$$

Otetaan yhteinen tekijä:

$$x(-x + 7) = 0$$

Tulon nollasäännön perusteella

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -x + 7 = 0 \quad || +x$$

$$7 = x$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 7$

d)

$$x^2 + 4 = 0 \quad || -4$$

$$x^2 = -4$$

Luvun neliö ei voi olla negatiivinen, joten sillä ei ole reaalisia ratkaisuja.

Sessio 6 Tehtävä 7 (PA)

Sievennä

$$\text{a) } \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{20}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}$$

$$\text{c) } \sqrt{20} - \sqrt{125}$$

$$\text{d) } \sqrt{50} - \sqrt{18}$$

a)

$$\frac{\sqrt{25 \cdot 5}}{\sqrt{4 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{5}}{\sqrt{4}\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}$$

Huomaa, että $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$.

b)

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 3}}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{16}\sqrt{3}}{\sqrt{25}\sqrt{3}} = \frac{4}{5}$$

c)

$$\sqrt{20} - \sqrt{125} = \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} = 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

d)

$$\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Sessio 6 Tehtävä 8 (PA)

Sievennä

$$\text{a) } \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{10}} - 3\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{147}}$$

a)

$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{10}} - 3\sqrt{2} = \sqrt{\frac{80}{10}} - 3\sqrt{2} = \sqrt{8} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

b)

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9 \cdot 2}} - \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{9 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

c)

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9 \cdot 5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{7}{21} + \frac{3}{21} = \frac{10}{21}$$

Sessio 6 Tehtävä 9 (PA)

Ratkaise yhtälö

$$\text{a) } 12x^2 - 3 = 0$$

$$\text{b) } 9x^2 - 4 = 0$$

$$\text{c) } 2x^2 - \sqrt{3}x = 0$$

a)

$$12x^2 - 3 = 0 \quad || + 3$$

$$12x^2 = 3 \quad || : 12$$

$$x^2 = \frac{3}{12}$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad || \sqrt{\quad}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{1}{2}$$

b)

$$9x^2 - 4 = 0 \quad || + 4$$

$$9x^2 = 4 \quad || : 9$$

$$x^2 = \frac{4}{9} \quad || \sqrt{\quad}$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ tai } x = \frac{2}{3}$$

c)

$$2x^2 - \sqrt{3}x = 0$$

Otetaan yhteinen tekijä x :

$$x(2x - \sqrt{3}) = 0.$$

Tulon nollasäännön nojalla

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - \sqrt{3} = 0 \quad || + \sqrt{3}$$

$$2x = \sqrt{3} \quad || : 2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vastaus: } x = 0 \text{ tai } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sessio 6 Tehtävä 10 (PA)

Ratkaise $(x - \sqrt{9})(x + \sqrt{9}) = 4^2$.

Ratkaisu:

$$(x - \sqrt{9})(x + \sqrt{9}) = 4^2$$

$$x^2 - 9 = 16 \quad | +9$$

$$x^2 = 25 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm 5$$

Vastaus: $x = -5$ tai $x = 5$

Sessio 6 Tehtävä 11 (SA)

Osoita käyttämättä likiarvoja, että $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$.

$$\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \quad || - 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

Korotetaan yhtälö puolittain neliöön. Näin voidaan tehdä, koska kumpikin yhtälön puoli on epänegatiivinen.

$$\text{Saamme } 30 - 12\sqrt{6} = (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2$$

$$30 - 12\sqrt{6} = 18 - 12\sqrt{6} + 12$$

$$30 - 12\sqrt{6} = 30 - 12\sqrt{6}$$

Siis yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria, joten väite pitää paikkansa. \square

Sessio 6 Tehtävä 12 (SA)

Ratkaise yhtälö $10^4(x^2 - 1) = (x - 1)$. (S1993/3a)

$$10^4(x^2 - 1) = (x - 1)$$

Käytetään summan ja erotuksen tulo-kaavaa:

$$10^4(x - 1)(x + 1) - (x - 1) = 0$$

Otetaan yhteinen tekijä $x - 1$:

$$(x - 1)(10^4(x + 1) - 1) = 0$$

Käytetään tulo nollassääntöä:

$$x - 1 = 0 \quad \| + 1 \quad \text{tai} \quad 10^4(x + 1) - 1 = 0 \quad \| + 1$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad 10^4(x + 1) = 1 \quad \| : 10^4$$

$$x + 1 = \frac{1}{10^4} \quad \| - 1$$

$$x = \frac{1}{10^4} - 1$$

Vastaus: $x = 1$ ja $x = \frac{1}{10^4} - 1$.

Sessio 6 Tehtävä 13 (SA)

Sievennä

$$a) \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}$$

$$b) \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - 1)(1 + \sqrt{3})}$$

$$c) \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$$

a)

$$\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}$$

Sievennetään nimittäjä summan ja erotuksen tulo -kaavan avulla ja osoittaja binomin neliön -kaavan avulla:

$$\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(1^2 - (\sqrt{2})^2)} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{1 - 2} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{-1} = 2\sqrt{6} - 5.$$

b)

$$\frac{\sqrt{8}^2 + 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{-(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}$$

Sievennetään nimittäjä summan ja erotuksen tulo -kaavan avulla ja osoittaja binomin neliön -kaavan avulla:

$$\frac{(\sqrt{8})^2 + 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{-(1^2 - (\sqrt{3})^2)} = \frac{8 + 2 \cdot \sqrt{16} + 2}{-(1 - 3)} = \frac{8 + 8 + 2}{2} = 9.$$

c)

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$$

Lavennetaan luvulla $\sqrt{5} + 1$:

$$\frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)}$$

Käytetään summan ja erotuksen tulo -kaavaa nimittäjän sieventämiseen ja osoittajan sieventämiseen binomin neliön kaavaa:

$$\frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{((\sqrt{5})^2 - 1^2)} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{5 - 1} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Sessio 6 Tehtävä 14 (SA)

Määritä yhtälön $(1 + x + \sqrt{x})(1 + x - \sqrt{x}) = 1$ reaaliuuret. (S1990/1a)

$$(1 + x + \sqrt{x})(1 + x - \sqrt{x}) = 1$$

Ryhmitellään yhtälön vasen puoli:

$$((1 + x) + \sqrt{x})((1 + x) - \sqrt{x}) = 1 .$$

Käytetään summan ja erotuksen tulo -kaavaa:

$$\left((1 + x)^2 - x \right) = 1 .$$

Käytetään binomin neliön -kaavaa:

$$1 + 2x + x^2 - x = 1 \quad || - 1$$

$$x^2 + x = 0 .$$

Otetaan x yhteiseksi tekijäksi:

$$x(x + 1) = 0 .$$

Tulon nollasäännön perusteella:

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 = 0 \quad || - 1$$

$$x = -1$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = -1$

Sessio 6 Tehtävä 15 (SA)

Sievennä $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$.

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

Lavennetaan luvulla $\sqrt{2} + 1$:

$$\frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}$$

Käytetään osoittajassa on binomin neliön -kaavaa ja nimittäjässä summan ja erotuksen tulon -kaavaa:

$$\frac{2 + 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Vastaus: $3 + 2\sqrt{2}$