Sessio 7 Tehtävä 4 (PA)

Ratkaise toisen asteen yhtälöt toisen asteen ratkaisukaavan avulla.

a) $x^2 + x - 2 = 0$

b) $2x^2 - 2x - 12 = 0$

c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

a)

Sijoitetaan yhtälön $x^2 + x - 2 = 0$ kertoimet $a = 1, b = 1$ ja $c = -2$

toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Vastaus: $x = -2$ tai $x = 1$

b)

Sijoitetaan yhtälön $2x^2 - 2x - 12 = 0$ kertoimet $a = 2, b = -2$ ja $c = -12$

toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{2 \pm 10}{4}$$

$$x = \frac{2-10}{4} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+10}{4} = 3$$

Vastaus: $x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 3$

c)

Sijoitetaan yhtälön $x^2 - 5x + 4 = 0$ kertoimet $a = 1, b = -5$ ja $c = 4$

toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5+3}{2} = 4$$

Vastaus: $x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 4$

Sessio 7 Tehtävä 5 (PA)

Ratkaise seuraavat toisen asteen yhtälö

a) $x^2 - 3x + 6 = 4$

b) $x^2 - 49 = 0$

c) $3x^2 + 3x = 6$

a)

Kun nollasta eroavat termit ovat yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella, voidaan tutkia milloin $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Yhtälön $x^2 - 3x + 2 = 0$ kertoimet ovat $a = 1, b = -3$ ja $c = 2$.

Sijoitetaan ne toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{3 - 1}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Vastaus: $x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 2$

b)

Tapa 1:

$x^2 - 49 = 0 \quad \| + 49$

$x^2 = 49 \quad \| \sqrt{}$

$x = -7$ tai $x = 7$

Tapa 2:

Sovelletaan summan ja erotuksen tuloa:

$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7) = 0$

Tulon nollasäännön perusteella:

$x + 7 = 0 \quad \| - 7$ tai $x - 7 = 0 \quad \| + 7$

$x = -7$ tai $x = 7$

c)

$3x^2 + 3x = 6 \quad \| - 6$

$3x^2 + 3x - 6 = 0$

Yhtälöstä saadaan kertoimet $a = 3, b = 3$ ja $c = -6$, jotka sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6} = \frac{-3 \pm 9}{6}$$

$$x = \frac{-3 - 9}{6} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 9}{6} = 1$$

Vastaus: $x = -2$ tai $x = 1$

Sessio 7 Tehtävä 6 (PA)

Ratkaise yhtälö $(x-2)(x-3)=6$ (S2014/1a)

$(x-2)(x-3)=6$

Kun kerrotaan sulut pois, yhtälö saadaan muotoon

$x^2-5x+6=6 \quad \| -6$

$x^2-5x=0$

$x\,(x-5)=0$

Tulon nollasäännön nojalla

$x=0$ tai $x-5=0 \quad \| +5$

$x=0$ tai $x=5$

Vastaus: $x=0$ tai $x=5$

Sessio 7 Tehtävä 7 (PA)

Ratkaise yhtälö $3-x=x^2+2x-1$

$3-x=x^2+2x-1 \quad \| -3$

$-x=x^2+2x-4 \quad \| +x$

$x^2+3x-4=0\,.$

Yhtälön $x^2+3x-4=0$ kertoimet $a=1$, $b=3$ ja $c=-4$ sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}$$

$x=\dfrac{-3-5}{2}=-4$ tai $x=\dfrac{-3+5}{2}=1$

Vastaus: $x=-4$ tai $x=1$

Sessio 7 Tehtävä 8 (PA)

Ratkaise yhtälö $x^2 - 1 = 3\left(x+1\right)$ (S1991/1)

$x^2 - 1 = 3\left(x+1\right)$

Kerrotaan sulut auki:

$x^2 - 1 = 3x + 3$

Operoidaan kaikki termit samalle puolelle yhtälöä:

$x^2 - 1 = 3x + 3 \quad \| - 3$

$x^2 - 4 = 3x \quad \| - 3x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

Yhtälön $x^2 - 3x - 4 = 0$ kertoimet ovat $a = 1$, $b = -3$ ja $c = -4$.

Sijoitetaan ne toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ tai } x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 4$

Sessio 7 Tehtävä 9 (PA)

Kahden peräkkäisen parittoman kokonaisluvun tulo on 35. Mitkä ovat nämä kaksi kokonaislukua?

Kun luku x , $x \in Z$ kerrotaan luvulla 2, saadaan taatusti parillinen luku. Kun edelleen tähän lukuun lisätään tai vähennetään luku 1, saadaan pariton luku. Olkoot kaksi peräkkäistä paritonta kokonaislukua siis $2x-1$ ja $2x+1$, kun $x \in Z$.

Nyt $(2x-1)(2x+1)=35$

Huomataan, että yhtälön vasemman puoleisessa lausekkeessa on summan ja erotuksen tulo. Yhtälö sievenee siis muotoon:

$4x^2-1=35 \quad \| +1$

$4x^2=36 \quad \| : 4$

$x^2=9 \quad \| \sqrt{}$

$x=-3$ tai $x=3$

Sijoittamalla $x=-3$ tai $x=3$ lausekkeisiin $2x-1$ ja $2x+1$, niin saadaan:

	$x=-3$	$x=3$
$2x-1$	$2\cdot(-3)-1=-6-1=-7$	$2\cdot 3-1=6-1=5$
$2x+1$	$2\cdot(-3)+1=-6+1=-5$	$2\cdot 3+1=6+1=7$

Kaksi peräkkäistä lukua ovat siis joko -7 ja -5 tai 5 ja 7.

Vastaus: -7 ja -5 tai 5 ja 7

Sessio 7 Tehtävä 10 (PA)

Olkoon $f(x)=x^3+3x^2+x+1$ ja $g(x)=x^3+x^2-2x+3$ (K2004/1)

a) Laske $f(-2)$

b) Laske $g\left(\frac{1}{2}\right)$

c) Ratkaise yhtälö $f(x)=g(x)$

Malliratkaisut MAA2, Luku 7

a)

Sijoitetaan x:n paikalle luku -2:

$$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + (-2) + 1 = 3\ .$$

b)

Sijoitetaan x:n paikalle luku $\frac{1}{2}$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 + 3 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + 2 = 2\frac{3}{8}$$

c)

$f(x) = g(x)$ eli

$$x^3 + 3x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 3$$

Operoidaan kaikki termit samalle puolelle ja yhdistetään samanmuotoiset termit:

$$x^3 + 3x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 3 \quad \| - x^3$$

$$3x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 3 \quad \| - x^2$$

$$2x^2 + x + 1 = -2x + 3 \quad \| + 2x$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 3 \quad \| - 3$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Yhtälön $2x^2 + 3x - 2 = 0$ kertoimet $a = 2$, $b = 3$ ja $c = -2$ sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

Nyt $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4}$

$x = \dfrac{-3-5}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$ tai $x = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Vastaus: $x = -2$ tai $x = \dfrac{1}{2}$

Sessio 7 Tehtävä 11 (SB)

Kahden kokonaisluvun summa on 14 ja tulo 48. Mitkä nämä kaksi lukua ovat?

Olkoot x ja y kokonaislukuja.

Summa: $x + y = 14$

Tulo: $x \cdot y = 48$

Tapa 1:

Näiden yhtälöiden pitää olla yhtäaikaa voimassa, joten saadaan yhtälöpari. Tämä yhtälöpari voidaan ratkaista CAS-laskimella yhtälönratkaisukomennolla, jonka opit luvussa 1.1. Tämä malliratkaisu on laadittu TI-nspirellä:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=14 \\ x\cdot y=48 \end{cases}, x, y\right) \blacktriangleright x=6 \text{ and } y=8 \text{ or } x=8 \text{ and } y=6$$

Vastaus: Kysytyt kokonaisluvut ovat 6 ja 8.

Tapa 2:

Ratkaistaan summan yhtälöstä y käsin tai CAS-laskimella (tämän malliratkaisun laatimisessa on käytetty TI-nspireä)

$$\text{solve}(x+y=14, y) \blacktriangleright y=14-x$$

ja sijoitetaan se tulon yhtälöön:

$x(14 - x) = 48$. Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella:

$$\text{solve}(x\cdot(14-x)=48, x) \blacktriangleright x=6 \text{ or } x=8$$

Lasketaan näitä vastaavat y:n arvot:

$y = 14 - 6 = 8$ tai

$y = 14 - 8 = 6$.

Vastaus: Luvut ovat siis 6 ja 8.

Sessio 7 Tehtävä 12 (SB)

Ratkaise yhtälö $x^2 + x - \frac{5}{2} = 0$.

$$x^2 + x - \frac{5}{2} = 0$$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön kertoimet $a = 1,\ b = 1$ ja $c = -\frac{5}{2}$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2}}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{11}}{2} \text{ tai } x = \frac{-1 - \sqrt{11}}{2}$$

Vastaus: $x = \frac{-1 + \sqrt{11}}{2}$ tai $x = \frac{-1 - \sqrt{11}}{2}$

Sessio 7 Tehtävä 13 (SA)

Miten luku 10 tulee jakaa kahteen erisuuruiseen osaan, jos osien tulo on 24?

Olkoon toinen luvuista x, silloin toinen luku on $10 - x$.

Koska lukujen tulo on 24, niin $(10 - x)x = 24$, eli $-x^2 + 10x - 24 = 0$.

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön kertoimet $a = -1,\ b = 10$ ja $c = -24$ ratkaisukaavaan $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{-2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-10 \pm 2}{-2}$$

$$x = \frac{-10 - 2}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \text{ tai } x = \frac{-10 - +2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Vastaus: $x = 4$ tai $x = 6$

Sessio 7 Tehtävä 14 (SA)

Ratkaise neliöön täydentämällä: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

Jaetaan keskimmäinen termi tekijöihin, jotta voidaan käyttää binomin neliön kaavaa $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 8 = 0 \quad \| + 1$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 1$

$(x-3)^2 = 1 \quad \| \sqrt{}$

$x - 3 = \pm 1$

$x - 3 = 1 \quad \| + 3$ tai $x - 3 = -1 \quad \| + 3$

$x = 4$ tai $x = 2$

Vastaus: $x = 4$ tai $x = 2$

Sessio 7 Tehtävä 15 (SA)

Ratkaise toisen asteen yhtälö $x^2 - x - 6 = 0$ neliöön täydentämällä.

$x^2 - x - 6 = 0$

Binomin neliön kaavan mukaan$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Merkitään keskimmäiseen termiin kertoja 2 näkyviin, jotta lausekkeen arvo ei muuttuisi, täytyy kakkosta kertoa sen käänteisluvulla $\frac{1}{2}$:

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - 6 = 0$.

Binomin neliön kaavan b on siis nyt $\frac{1}{2}$ ja $b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Muokataan yhtälöä niin, että vasemmalle puolelle yhtälöä saadaan lauseke $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$:

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - 6 = 0 \quad \| + 6$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 6 \quad \| + \frac{1}{4}$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$

Nyt voidaan käyttää yhtälön vasemman puoleiseen lausekkeeseen binomin neliön kaavaa:

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \| \sqrt{}$

$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$

Eli $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad \| + \frac{1}{2}$ tai $x - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \quad \| + \frac{1}{2}$

$x = \frac{6}{2} = 3$ tai $x = -\frac{4}{2} = -2$.

Vastaus: $x = -2$ tai $x = 3$

Sessio 7 Tehtävä 16 (SA)

Ratkaise $(x+3)^2 - 6(x+3) + 5 = 0$

Kokeile ratkaista aukaisematta sulkeita.

Ajatellaan binomi $x+3$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan x:n paikalle. Merkitään esimerkiksi, että $u = x+3$. Tällöin yhtälö $(x+3)^2 - 6(x+3) + 5 = 0$ saadaan muotoon $u^2 - 6 \cdot u + 5 = 0$.

Nyt yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ avulla.

Merkitään ylös eri asteisten termien kertoimet: $a = 1$, $b = -6$ ja $c = 5$.

Sijoitetaan ne toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan:

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$u = \frac{6-4}{2} == \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad u = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Sijoitetaan u:n lauseke $u = x+3$ yhtälöön $u = 1$ ja $u = 5$:

$x + 3 = 5 \quad || -3$ tai $x + 3 = 1 \quad || -3$

$x = 2$ tai $x = -2$

Vastaus: $x = -2$ tai $x = 2$