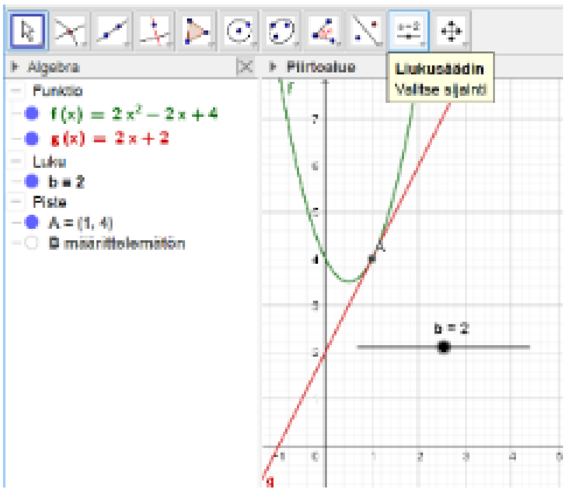
Sessio 8 Tehtävä 4 (PB)

Millä vakion b arvolla funktiot $f(x) = 2x^2 - bx + 4$ ja $g(x) = 2x + 2$ sivuavat toisiaan? Tutki tilannetta piirto-ohjelman avulla.

GeoGebralla saadaan:



Siis, kun luku $b = 2$, niin funktioiden kuvaajat sivuavat toisiaan pisteessä $(1, 4)$.

Sessio 8 Tehtävä 5 (PA)

Millä parametrin a arvolla yhtälöllä $4x^2 + ax + 1 = 0$ on täsmälleen yksi juuri?

Diskriminantiksi saadaan

$$D = a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = a^2 - 16 \; .$$

Koska halutaan, että yhtälöllä

$$a^2 - 16 = 0 \quad \| + 16$$

$$a^2 = 16 \quad \| \sqrt{}$$

$$a = \pm 4$$

Vastaus: $a = -4$ tai $a = 4$

Sessio 8 Tehtävä 6 (PA)

Millä a:n arvoilla yhtälöllä $ax^2 + 3ax + 1 = 0$ on vain yksi reaalinen ratkaisu? Mikä se ratkaisu on?

$$x = \frac{-3a \pm \sqrt{(3a)^2 - 4 \cdot a \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 4a}}{2}$$

Nyt siis diskriminantin $D = 9a^2 - 4a$ arvo on nolla, koska tällöin yhtälöllä on tasan yksi reaalinen ratkaisu.

Otetaan a yhteiseksi tekijäksi yhtälöstä $9a^2 - 4a = 0$:

$a\,(9a - 4) = 0\,.$

Tulon nollasäännön perusteella

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad 9a - 4 = 0 \quad \| + 4$$

$$9a = 4 \quad \| : 9$$

$$a = \frac{4}{9}$$

Siis, kun $a = \frac{4}{9}$ tai $a = 0$, on yhtälöllä yksi reaalinen ratkaisu.

Kun $a = \frac{4}{9}$, niin $ax^2 + 3ax + 1 = 0$ saadaan muotoon

$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0 \quad \| \cdot 9$$

$4x^2 + 12x + 9 = 0$, josta toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8} = -\frac{3}{2}\,.$$

Kun $a = 0$, niin yhtälö $ax^2 + 3ax + 1 = 0$ supistuu muotoon 1 = 0. Tällöin yhtälö on identtisesti epätosi eli sillä ei ole ratkaisua.

Vastaus: Kun $a = \frac{4}{9}$ on $x = -\frac{3}{2}$.

Sessio 8 Tehtävä 7 (SA)

Millä parametrin b arvolla paraabeli $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ja suora $g(x) = 5x + b$ sivuavat toisiaan? Mikä on tämä sivuamispiste?

Muodostetaan yhtälö merkitsemällä funktioiden f ja g lausekkeet yhtä suuriksi:

$x^2 + 4x + 3 = 5x + b \quad \| - 5x$

$x^2 - x + 3 = b \quad \| - b$

$x^2 - x + 3 - b = 0$.

Tällä yhtälöllä on yksi ratkaisu, jos diskriminantin
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - b) = 1 - 4(3 - b) = 1 - 12 + 4b = -11 + 4b$ arvo on nolla.

Funktiot siis sivuavat, jos diskriminantti

$-11 + 4b = 0 \quad \| + 11$

$4b = 11 \quad \| : 4$

$b = \frac{11}{4}$.

Tutkitaan yhtälön $x^2 - x + 3 - b = 0$ ratkaisua toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla sijoittamalla diskriminantin arvo nolla kaavaan:

$x = \frac{1 \pm 0}{2} = \frac{1}{2}$.

Lasketaan esimerkiksi funktion g arvo saadussa kohdassa:

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{4} = \frac{21}{4}$

Sivuamispiste on siis $\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right)$.

Vastaus: Kun $b = \frac{11}{4}$, sivuavat funktiot f ja g toisiaan pisteessä $\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right)$

Sessio 8 Tehtävä 8 (SA)

Osoita, että funktio $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ saa vain positiivisia arvoja.

Voimme todeta, että funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Sillä on korkeintaan 2 reaalista nollakohtaa, koska se on toista astetta.

Tutkimalla diskriminanttia $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$, voidaan todeta, että funktiolla f ei ole nollakohtia. Tämä tarkoittaa sitä, että funktion kuvaaja ei leikkaa x-akselia missään pisteessä. Funktio saa siis vain positiivisia arvoja.

Sessio 8 Tehtävä 9 (SB)

Määritä parametri b siten, että yhtälöllä $x^2 + bx + 5 = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Mikä ratkaisu on?

Yhtälöllä $x^2 + bx + 5 = 0$ on vain yksi ratkaisu, kun $D = 0$.

Nyt $D = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 0$

$b^2 - 20 = 0$

$b^2 = 20$

$b = \pm\sqrt{20}$

$b = -2\sqrt{5}$ tai $b = 2\sqrt{5}$

1) Kun $b = -2\sqrt{5}$, niin sijoitetaan se alkuperäiseen yhtälöön ja tutkitaan milloin $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$.

Nyt $x = \dfrac{2\sqrt{5} \pm \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} =$

$\dfrac{2\sqrt{5} \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2}$

$x = \sqrt{5}$

2) Kun $b = 2\sqrt{5}$, niin sijoitetaan se alkuperäiseen yhtälöön ja tutkitaan milloin $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 0$.

Nyt $x = \dfrac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} =$

$\dfrac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{2}$

$x = -\sqrt{5}$

Vastaus: Yhtälöllä $x^2 + bx + 5 = 0$ on yksi ratkaisu $x = \sqrt{5}$, kun $b = -2\sqrt{5}$. Yhtälöllä $x^2 + bx + 5 = 0$ on myös yksi ratkaisu $x = -\sqrt{5}$, kun $b = 2\sqrt{5}$.

Sessio 8 Tehtävä 10 (SB)

Määritä yhtälön $ax^2 - 2x - a = 0$ pienempi juuri, kun a on nollasta eroava vakio. (K1992/5a)

Tehtävänannon mukaisesti $ax^2 - 2x - a = 0$ on toisen asteen yhtälö, kun $a \neq 0$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot a \cdot (-a)}}{2 \cdot a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4a^2}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1 + a^2)}}{2a} =$$

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{1 + a^2}}{2a} = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{1 + a^2}\right)}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{a}$$

Diskriminantti $D = 1 + a^2 > 0$ kaikilla a:n arvoilla, joten yhtälöllä on kaksi reaalista ratkaisua:

$x = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}$ tai $x = \frac{1 - \sqrt{1 + a^2}}{a}$.

Tarkastellaan juurien suuruutta:

Kun $a > 0$, niin $\frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a} > \frac{1 - \sqrt{1 + a^2}}{a}$ ja silloin pienempi juuri on $x = \frac{1 - \sqrt{1 + a^2}}{a}$

Kun $a < 0$, niin $\frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a} < \frac{1 - \sqrt{1 + a^2}}{a}$ ja pienempi juuri on $x = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}$

Vastaus: Siis pienempi juuri on $x = \frac{1 - \sqrt{1 + a^2}}{a}$, kun $a > 0$ ja $x = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}$, kun $a < 0$.

Sessio 8 Tehtävä 11 (SA)

Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $2ax^2 - 5x + 2 = 0$ on täsmälleen yksi juuri? (K2014/4)

Yhtälöllä $2ax^2 - 5x + 2 = 0$ on täsmälleen yksi juuri, kun sen diskriminantti $D = 0$

Nyt $D = 5^2 - 4 \cdot 2a \cdot 2 = 25 - 16a$.

Milloin siis $25 - 16a = 0$?

$25 - 16a = 0 \quad || +25$

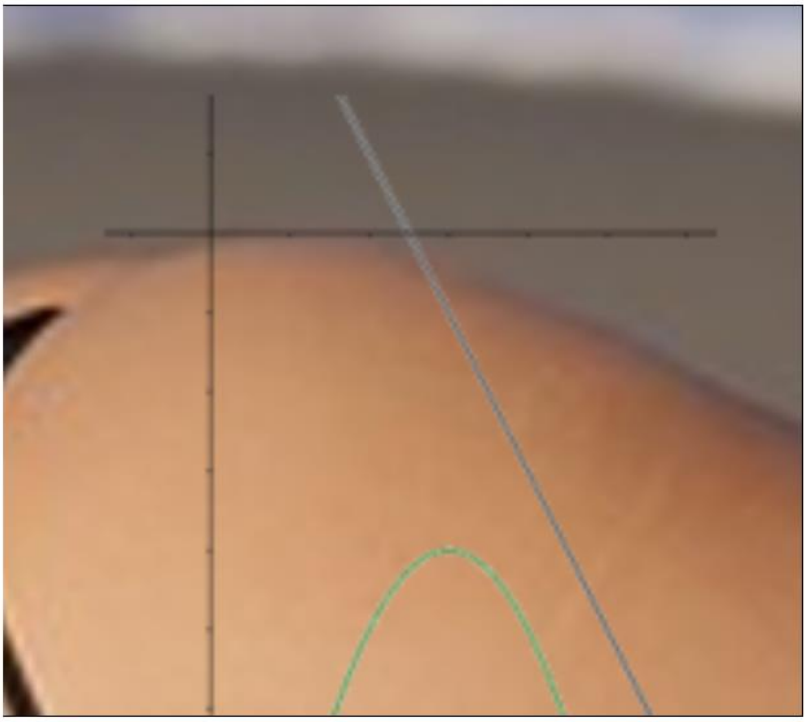
$-16a = 25 \quad || : (-16)$

$a = -\frac{25}{16}$

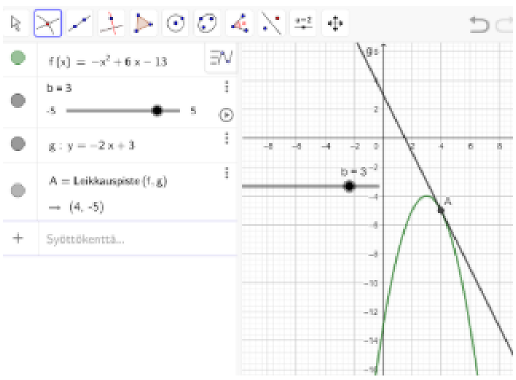
Vastaus: Annetulla yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun $a = -1\frac{9}{16}$

Sessio 8 Tehtävä 12 (SB)

Eräällä syöpäpotilaalla oli koteloitunut etäispesäke eli metastaasi isoissa pakaralihaksissa (musculus gluteus maximus) oheisen kuvan mukaisesti. Etäispesäke on kuvassa vihreän paraabelin $f(x) = -x^2 + 6x - 13$ alapuolella. Lääkäri Mutikainen suunnittelee hoito-operaatiota, jossa tehtäisiin etäispesäkkeen sivuyläpintaan avanne, josta voitaisiin täsmäoperoida tähystyksellä etäispesäke. Suunnittele oheisen hoitokaaviokuvan ja piirto-ohjelman avulla mihin kohtaan Mutikaisen kannattaa hoitokanava operoida. Hoitokanava tehdään suoran $y = -2x + b$ suuntaisesti. Mutikaisen on otettava huomioon, että etäispesäkettä ei saisi puhkaista. Tutki piirto-ohjelman avulla, missä koordinaateissa on hoitokanavan ja koteloituneen etäispesäkkeen sivuamiskohta? Kuvassa akselisto näkyy mustalla ja hoitokanavaa operoiva tekolaser liikkuu x-akselia pitkin. Mihin x-koordinaattiin laserin pää pitää sijoittaa?



Tutkitaan tilannetta GeoGebran avulla:



Edellä olevassa kuvassa on piirretty funktiot. Vakiolle b on luotu liukusäädin. Voidaan huomata, että b:n arvolla 3 funktiot sivuavat toisiaan.

Leikkauspiste-työkalulla voidaan havaita sivuamispisteeksi $(4, -5)$.

x-akselilla jokaisen pisteen y-koordinaatti on nolla. Suoralla $y = -2x + 3$, y saa arvon 0 kohdassa $x = 1\frac{1}{2}$. Mutikaisen kannattaa viedä laserin pää tähän kohtaan x-akselilla.

Vastaus: Lääkäri Mutikaisen kannattaa viedä laserin pää kohtaan $(1\frac{1}{2}, 0)$ ja hoitokanava sivuaa etäispesäkettä kohdassa $(4, -5)$.

Sessio 8 Tehtävä 13 (SA)

Millä a:n arvoilla yhtälöllä $\left(a^2-3a+2\right)x^2+\left(a^2-5a+4\right)x-\left(a^2-a\right)=0$ on enemmän kuin kaksi ratkaisua? (S1994/5)

Toisen asteen yhtälöllä voi olla enemmän kuin kaksi ratkaisua, jos yhtälö on identtisesti tosi. Tällöin sillä on ääretön määrä ratkaisuja.

Jotta yhtälö $\left(a^2-3a+2\right)x^2+\left(a^2-5a+4\right)x-\left(a^2-a\right)=0$ olisi identtisesti tosi, täytyy muuttujien kertoimien ja vakion olla nolla. Toisin sanoen

$$\begin{cases} a^2-3a+2=0 \\ a^2-5a+4=0. \\ a^2-a=0 \end{cases}$$

Tarkastellaan viimeistä yhtälöä: $a^2-a=0$:

Otetaan a yhteiseksi tekijäksi:

$$a(a-1)=0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$a=0 \quad \text{tai} \quad a-1=0 \quad \|+1$$

$$a=1$$

Kun $a=0$, supistuu ensimmäinen yhtälö muotoon $2=0$ ja toinen yhtälö muotoon $4=0$. Nämä yhtälöt ovat identtisesti epätosia, joten $a=0$ ei kelpaa ratkaisuksi.

Kun $a=1$, saadaan alkuperäinen yhtälö muotoon

$$\left(1^2-3\cdot1+2\right)x^2+\left(1^2-5\cdot1+4\right)x-\left(1^2-1\right)=0$$

$$0\cdot x^2+0\cdot x-0=0$$

$$0=0.$$

Siis kun $a=1$, on alkuperäinen yhtälö identtisesti tosi ja sillä on äärettömän monta ratkaisua.

Vastaus: $a=1$

Sessio 8 Tehtävä 14 (SA)

Mikä on polynomifunktion $p(x) = -2x^2 - 4x - 5$ suurin arvo? Millä muuttujan x arvolla se saavutetaan?

Koska x^2:n termin kerroin on positiivinen, niin polynomifunktion kuvaaja saa pienimmän arvonsa sen huipussa.

Nyt ratkaisukaavassa neliöjuurilauseke diskriminantti D<0, joten huipun x-koordinaatti saadaan laskettua seuravasti:

$$x_h = \frac{-(-4)}{2 \cdot (-2)} = -1$$

$$y_h = f(-1) = -2(-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 5 = -3$$

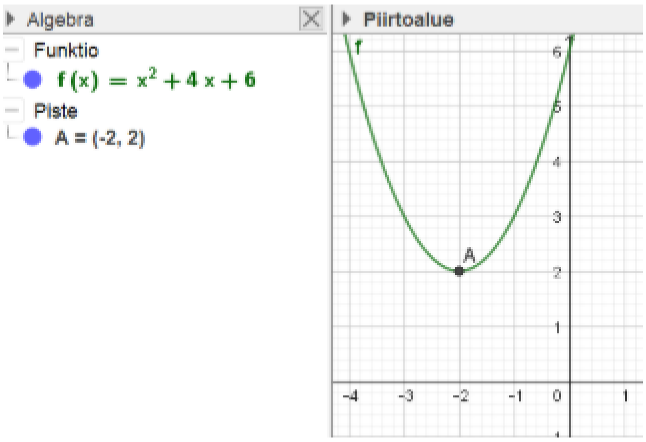
$$(x_h, y_h) = (-1,\ -3)$$

Vastaus: Suurin arvo on siis -3 ja se saadaan x:n arvolla -1.

Sessio 8 Tehtävä 15 (SB)

Määritä paraabelin $f(x) = x^2 + 4x + 6$ pienin arvo.

Paraabelin $f(x) = x^2 + 4x + 6$ kuvaaja näyttää tältä:



$$x_h = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$y_h = f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 6 = 2$$

Vastaus: $(x_h, y_h) = (-2,\ 2)$

Sessio 8 Tehtävä 16 (SA)

Ratkaise yhtälö $x^2 + 2x + 5 = 0$.

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$ Huomaa, että negatiivisessa diskriminantissa korvataan miinusmerkki i^2:lla, koska $-1 = i^2$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16i^2}}{2}$

$x = \frac{-2 \pm 4i}{2} = \frac{2(-1 \pm 2i)}{2} = -1 \pm 2i$

$x = -1 + 2i$ tai $x = -1 - 2i$

Vastaus: $x = -1 + 2i$ tai $x = -1 - 2i$

Sessio 8 Tehtävä 17 (SA)

Ratkaise yhtälö $x^2 + x + \frac{5}{2} = 0$.

$x^2 + x + \frac{5}{2} = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2}}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9i^2}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm 3i}{2}$

$x = \frac{-1 + 3i}{2}$ tai $x = \frac{-1 - 3i}{2}$

Vastaus: $x = \frac{-1 + 3i}{2}$ tai $x = \frac{-1 - 3i}{2}$