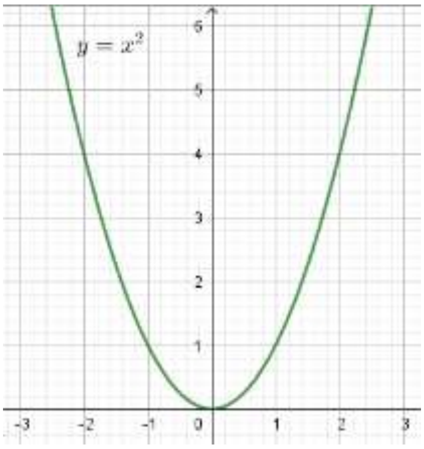
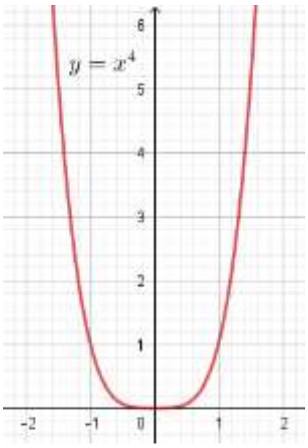
Korkeammat juuret

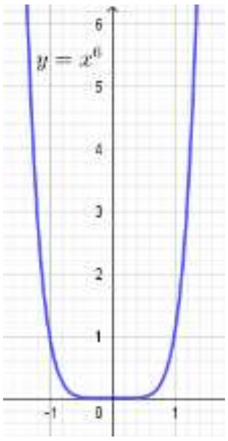
Neliöjuuren otto ja korottaminen toiseen potenssiin ovat toistensa käänteisoperaatiot. Siksi yhtälön $x^2 = 4$ ratkaisussa voidaan yhtälön molemmilta puolilta ottaa neliöjuuri ja saadaan (neliöjuuren laskusääntöjen mukaan) $|x| = 2$, eli $x = \pm 2$. Vastaava ratkaisuperiaate löytyy myös korkeammille potensseille x^n, missä $n \geq 3$.

Potenssifunktio: Muotoa $f(x) = x^n$ olevaa funktiota, missä *n* on luonnollinen luku, kutsutaan *potenssifunktioksi*.

Parillisten potenssifunktioiden, eli funktioiden, joiden lauseke on muotoa x^2, x^4, x^6, ... kuvaajat ovat symmetrisiä y-akselin suhteen, koska luvun ja sen vastaluvun parilliset potenssit ovat yhtä suuret positiiviset luvut. Esim. $(-a)^4 = a^4$.





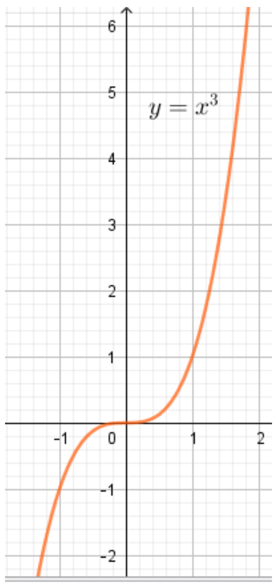


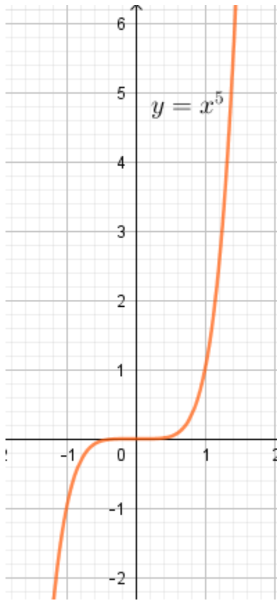
Siis on olemassa kaksi lukua, jotka toteuttavat yhtälön $x^4 = 16$. Nämä luvut ovat 2 ja -2. Luku 2 on luvun 16 neljäs juuri; $\sqrt[4]{16} = 2$.

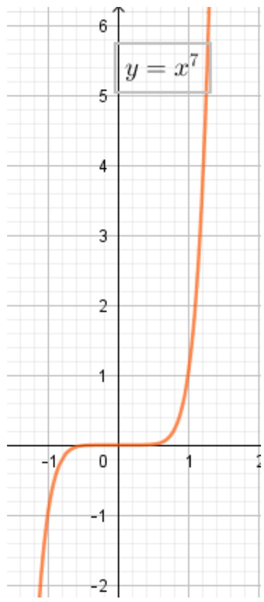
Jos *n* on parillinen positiivinen kokonaisluku:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ jos } b \geq 0 \text{ ja } b^n = a.$$

Parittomien potenssifunktioiden $x^3, x^5, x^7, \ldots$ kuvaajat ovat origon suhteen symmetrisiä, koska luvun ja sen vastaluvun parittomat potenssit ovat toistensa vastalukuja. Esim. $(-x)^5 - x^5$.







Yhtälön $x^3 = -8$ toteuttaa vain yksi luku, -2, joka on luvun -8 kolmas juuri: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Jos *n* on pariton positiivinen kokonaisluku:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ kun } b^n = a.$$

Huom. Neliöjuuri on vakiintunut nimitys toiselle juurelle ja sille käytetään myös lyhyempää merkintää: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Kolmatta juurta $\sqrt[3]{a}$ nimitetään myös *kuutiojuureksi*.

Potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaiseminen

Potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaisutavat eroavat hieman riippuen siitä, onko *n* parillinen vai pariton positiivinen kokonaisluku:

1) *n* on parillinen positiivinen kokonaisluku: Kun $a \geq 0$, niin yhtälön $x^n = a$ toteuttavat $x = \sqrt[n]{a}$ ja $x = -\sqrt[n]{a}$. Kun $a < 0$ yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua.
2) *n* on pariton positiivinen kokonaisluku: niin yhtälön $x^n = a$ toteuttaa luvun *a* n:s juuri $x = \sqrt[n]{a}$.

Esimerkki: Ratkaise yhtälö a) $x^6 = 12$ b) $x^4 = -8$ c) $x^3 = 8$ d) $x^3 = -8$

Ratkaisu: a) $x^6 = 12$ yhtälöllä on kaksi ratkaisua (otetaan 6. juuri puolittain)

$x = \sqrt[6]{12}$ tai $x = -\sqrt[6]{12}$. Tarkka arvo

b) $x^4 = -8$ Yhtälön vasen puoli on aina positiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) $x^3 = 8$, koska $2^3 = 8$, niin yhtälön ratkaisu on $x = 2$.

d) $x^3 = -8$, koska $(-2)^3 = -8$, niin yhtälön ratkaisu on $x = -2$.

Harjoitustehtäviä: 1. Ratkaise yhtälöt a) $3x^5 + 96 = 0$ b) $2x^4 - 32 = 0$

2. Ratkaise yhtälöt. Anna vastaukseksi tarkka arvo. a) $5x^6 = 70$ b) $4x^5 - 128 = 0$