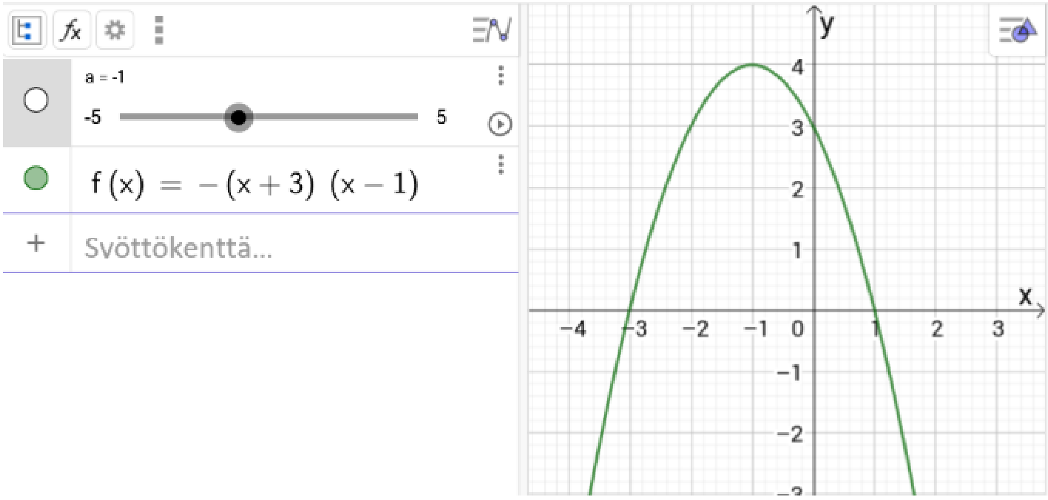
Sessio 9 Tehtävä 4 (PB)

Tutki miten piirto-ohjelman avulla saadaan toisen asteen polynomifunktio *f*, jonka nollakohdat ovat -3 ja 1 ja joka kulkee pisteen (0, 3) kautta.

Luodaan GeoGebralla liukukytkin a:lle kirjoittamalla syöttökenttään a ja klikkaamalla luo liuku.

Koska polynomifunktion nollakohdat ovat -3 ja 1, on sen funktion lauseke muotoa
$a(x-(-3))(x-1) = a(x+3)(x-1)$.

Kirjoitetaan tämä saatu lauseke seuraavaan syöttökenttään ja liikutellaan liukukytkintä, kunnes paraabeli kulkee pisteen (0, 3) kautta.



Vastaus: Kysytty funktio on $f(x) = -(x+3)(x-1)$

Sessio 9 Tehtävä 5 (PA)

Jaa tekijöihin paraabelia kuvaava $f(x) = 2x^2 + 13x - 7$ polynomifunktio.

Tutkitaan polynomifunktion f nollakohtia: $2x^2 + 13x - 7 = 0$. Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{-13 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-13 \pm 15}{4}$$

$$x = \frac{-13-15}{4} = -7 \text{ tai } x = \frac{-13+15}{4} = \frac{1}{2}$$

Merkitään $x_1 = -7$ ja $x_2 = \dfrac{1}{2}$ ja x^2:n termin kerroin a on 2 ja sijoitetaan polynomifunktion tekijämuotoon $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$f(x) = 2x^2 + 13x - 7 = 2\,(x+7)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+7)\,(2x-1)$$

Vastaus: $f(x) = 2\,(x+7)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = (x+7)\,(2x-1)$

Sessio 9 Tehtävä 6 (PA)

Jaa polynomifunktio $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ tekijöihin ja määritä myös sen nollakohdat.

Tutkitaan polynomifunktion p nollakohtia: $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$. Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{1} = \frac{-1 \pm 2}{1}$$

$$x = \frac{-1-2}{1} = -3 \text{ tai } x = \frac{-1+2}{1} = 1$$

Merkitään $x_1 = -3$ ja $x_2 = 1$ ja x^2:n termin kerroin a on $\frac{1}{2}$. Sijoitetaan nämä arvot polynomifunktion tekijämuotoon $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$: $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-1)(x+3)$.

Vastaus: $p(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ ja nollakohdat ovat -3 ja 1

Sessio 9 Tehtävä 7 (PB)

Jaa polynomifunktio $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3\frac{2}{5}x + 6$ tekijöihin ja määritä myös sen nollakohdat.

Jaetaan funktion f lauseke tekijöihin:

$$\text{factor}\left(\frac{1}{5} \cdot x^2 + \left(3 + \frac{2}{5}\right) \cdot x + 6\right) \blacktriangleright \frac{(x+2) \cdot (x+15)}{5}$$

Selvitetään seuraavaksi funktion f nollakohdat. Näiden selvittämiseen voi käyttää tulon nollasääntöä ja tekijöihin jaettua funktion f lauseketta tai ratkaista tehtävän suoraan yhtälönratkaisukomennolla.

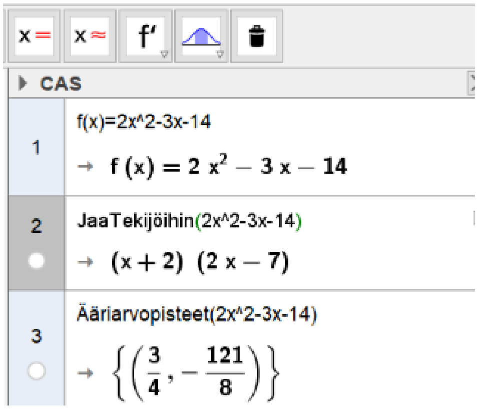
$$\text{solve}\left(\frac{1}{5} \cdot x^2 + \left(3 + \frac{2}{5}\right) \cdot x + 6 = 0, x\right) \blacktriangleright x = -15 \text{ or } x = -2$$

Vastaus: Tekijöihin jaettuna $f(x) = \frac{1}{5}(x+2)(x+15)$ ja nollakohdat ovat -15 ja -2.

Sessio 9 Tehtävä 8 (PB)

Jaa funktio $f(x) = 2x^2 - 3x - 14$ tekijöihin. Missä pisteessä on paraabelin huippu? Käytä tehtävän ratkaisemiseen piirto-ohjelmaa.

Kirjoitetaan funktio $f(x) = 2x^2 - 3x - 14$ GeoGebra-CAS:n syöttökenttään. Edelleen kirjoitetaan GeoGebra-CAS:n syötökenttään JaaTekijöihin(<Polynomi>) ja Ääriarvopisteet(<Polynomi>). Saadaan:



Vastaus: $f(x) = (x+2)(2x-7)$. Paraabelin huippu on pisteessä $(0,75; -15,13)$. Tarkat koordinaatit huipulle ovat $\left(\frac{3}{4}, -\frac{121}{8}\right)$.

Sessio 9 Tehtävä 9 (PA)

Jaa tekijöihin trinomi $9y - 12xy + 4yx^2$

Otetaan y yhteiseksi tekijäksi:

$$9y - 12xy + 4yx^2 = y\left(9 - 12x + 4x^2\right) .$$

Tapa 1

Huomaa, että sulkulauseke on erään binomin neliö:

$$9 - 12x + 4x^2 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + (-3)^2 = (2x-3)^2 \quad .$$

Silloin saadaan $9y - 12xy + 4yx^2 = y\,(2x-3)^2$

Tapa 2

Binomin neliö saadaan myös muodostettua tutkimalla trinomin nollakohtia: $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Tämä on siis lausekkkeen kaksoisjuuri.

Siis $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 2\left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x-3)(2x-3) = (2x-3)^2$

Nyt siis $9y - 12xy + 4yx^2 = y\,(2x-3)^2$

Vastaus: $y\,(2x-3)^2$

Sessio 9 Tehtävä 10 (PA)

Jaa tekijöihin $x^2 + 2x - 15$.

Tutkitaan lausekkeen nollakohtia: $x^2 + 2x - 15 = 0$. Yhtälön kertoimet $a = 1, b = 2$ ja $c = -15$ sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{-2 - 8}{2} = -5 \text{ tai } x = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Kun indeksoidut reaalijuuret $x_1 = -5$ ja $x_2 = 3$ sekä alkuperäisestä lausekkeesta saatu $a = 1$ sijoitetaan toisen asteen yhtälön tekijöihinjakokaavaan $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, niin saadaan $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$.

Vastaus: $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

Sessio 9 Tehtävä 11 (PA)

Millä vakion a arvolla yhtälön $x^2 - 6x + a = 0$ yhtenä juurena on 5. Mikä on toinen juuri?

Koska yksi juuri on 5, niin se toteuttaa yhtälön $x^2 - 6x + a = 0$, joten

$$5^2 - 6 \cdot 5 + a = 0$$

$$-5 + a = 0 \quad \| + 5$$

$$a = 5.$$

Nyt voidaan ratkaista yhtälön $x^2 - 6x + 5 = 0$ molemmat juuret toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{6 + 4}{2} = 5 \text{ tai } x = \frac{6 - 4}{2} = 1.$$

Vastaus: Toinen juuri on 1.

Sessio 9 Tehtävä 12 (PA)

Määritä vakio k siten, että $x = 2$ on funktion $f(x) = -2x^2 + x + k$ nollakohta. Jaa funktion lauseke myös tekijöihin.

Koska 2 on funktion f nollakohta:

$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 2 + k = -2 \cdot 4 + 2 + k = -6 + k = 0$, josta $k = 6$. Siis $f(x) = -2x^2 + x + 6$.

Tutkitaan funktion f nollakohtia: $-2x^2 + x + 6 = 0$. Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 7}{-4}$$

$$x = \frac{-1+7}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ tai } x = \frac{-1-7}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Merkitään $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ ja $x_2 = 2$ sekä $a = -2$ ja sijoitetaan polynomifunktion tekijämuotoon $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$: $f(x) = -2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x - 2)$.

Vastaus: $f(x) = -2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)(x - 2)$

Sessio 9 Tehtävä 13 (PA)

Mikä on sen kokonaislukukertoimisen paraabelin yhtälö, jonka juuret ovat $x_1 = \dfrac{-3}{4}$ ja $x_2 = \dfrac{1}{5}$.

Nyt paraabelin yhtälö on muotoa $y = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \dfrac{-3}{4}\right)\left(x - \dfrac{1}{5}\right) =$

$$a\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = a\left(x\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{5}\right)\right) =$$

$$a\left(x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) = a\left(x^2 - \frac{4}{20}x + \frac{15}{20}x - \frac{3}{20}\right) = a\left(x^2 + \frac{11}{20}x - \frac{3}{20}\right).$$

Kun valitaan $a = 20$ (mikä tahansa luvun 20 moninkerta täyttää tehtävänannon ehdot), niin saadaan kokonaislukukertoiminen polynomi:

Eli $p(x) = 20x^2 + 11x - 3$

Vastaus: Paraabelin yhtälö on siis esimerkiksi muotoa $y = 20x^2 + 11x - 3$

Sessio 9 Tehtävä 14 (PA)

Osoita, että yhtälön $x^2 - 2x + 2a - a^2 = 0$ juuret x_1 ja x_2 eivät voi olla toistensa vastalukuja, annettiinpa a:lle mikä arvo tahansa. (K1987/6)

Ratkaistaan yhtälö $x^2 - 2x + 2a - a^2 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a - a^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8a + 4a^2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{(2 - 2a)^2}}{2} = \frac{2 \pm (2 - 2a)}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 2 - 2a}{2} = 2 - a \text{ tai } x_2 = \frac{2 - 2 + 2a}{2} = a \text{ .}$$

Nyt juurten summa $x_1 + x_2 = 2 - a + a = 2$. Toisin sanoen juuret eivät voi olla toistensa vastalukuja millään a:n arvolla. □

Sessio 9 Tehtävä 15 (PB)

Rauno havaitsi, että lörtsyjen myynti noudattaa ulkoilman lämpötilaa polynomifunktion $p(x) = -x^2 + 33x + 70$ mukaisesti, kun x on lämpötila Celciusasteina.

a) Millä ulkoilman lämpötiloilla Raunon voi odottaa lörtsyjen menevän kaupaksi?

b) Esitä polynomifunktio $p(x)$ tekijöihin jaettuna.

c) Missä lämpötilassa lörtsyjen myynti on tuottoisinta?

a)

Ratkaistaan funktion p nollakohdat esimerkiksi TI-nspirellä:

solve$\left(-x^2+33\cdot x+70=0,x\right)$ ▸ $x=-2$ or $x=35$

Tehtävässä oleva paraabeli on alaspäin aukeava, koska termin x^2 kerroin on negatiivinen. Funktio p saa siis positiivisia arvoja nollakohtiensa välissä. Myyntiä siis syntyy, kun ulkoilman lämpötila on välillä $]-2, 35[$ Celsiusastetta.

Vastaus: Lörtsyjä voi odottaa menevän kaupaksi, kun ulkoilman lämpötila x on $-2^o\mathrm{C} < x < 35^o\mathrm{C}$.

b)

Jaetaan polynomifunktion p lauseke tekijöihin esimerkiksi TI-nspirellä:

factor$\left(-x^2+33\cdot x+70\right)$ ▸ $-(x-35)\cdot(x+2)$

Vastaus: $p(x) = -x^2 + 33x + 70 = -(x+2)(x-35)$.

c)

Myynti on suurimmillaan paraabelin huipun kohdalla ja se on nollakohtien puolessa välissä:

$$x_h = \frac{-2+35}{2} = 16,5\,.$$

Vastaus: Lörtsyjen myynti on suurimmillaan polynomifunktion huipun kohdalla, jolloin lämpötila ulkona on $16,5^o\mathrm{C}$.