Sessio 10 Tehtävä 2 (PA)

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ merkkikaaviota käyttäen.

Selvitetään funktion $f(x) = x^2 - 5x + 4$ nollakohdat yhtälöstä $x^2 - 5x + 4 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$x = \frac{5-3}{2} = 1$ tai $x = \frac{5+3}{2} = 4.$

Koska kyseessä on ylöspäin aukeva paraabeli $(a > 0)$, saa se negatiivisia arvoja nollakohtiensa välissä ja muualla positiivisia arvoja.

Tehdään merkkikaavio:

Nollakohdat		1		4	
$f(x) = x^2 - 5x + 4$	+	1	-	4	+

Siis $x \in [1, 4]$ tai vastaavasti $1 \leq x \leq 4$.

Vastaus: $1 \leq x \leq 4$

Sessio 10 Tehtävä 3 (PA)

Ratkaise epäyhtälö $-2x^2+7x>0$ merkkikaaviota käyttäen.

Tutkitaan funktion $f(x)=-2x^2+7x$ nollakohtia yhtälöstä $-2x^2+7x=0$ ottamalla yhteinen tekijä:

$-x\left(2x+7\right)=0$

Tulon nollasäännön mukaan:

$$x=0 \quad \text{tai} \quad 2x+7=0 \qquad \| -7$$

$$2x=-7 \qquad \| :2$$

$$x=-\frac{7}{2}=-3\frac{1}{2}$$

Koska kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli ($a<0$), saa se positiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

Nollakohdat		$-3\frac{1}{2}$		0	
$f(x)=-2x^2+7x$	-	$-3\frac{1}{2}$	+	0	-

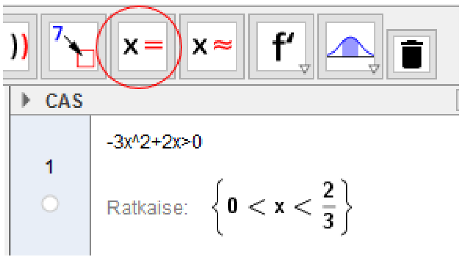
Siis $x\in\left]-3\frac{1}{2},0\right[$ eli $-3,5<x<0$.

Vastaus: $-3,5<x<0$

Sessio 10 Tehtävä 4 (PB)

Ratkaise epäyhtälö $-3x^2+2x>0$.

Kirjoitetaan syöttökenttään haluttu epäyhtälö ja valitaan rivi hiiren ykköspainikkeella ja painetaan kuvassa punaisella ympyröityä ratkaise-komentopainiketta.



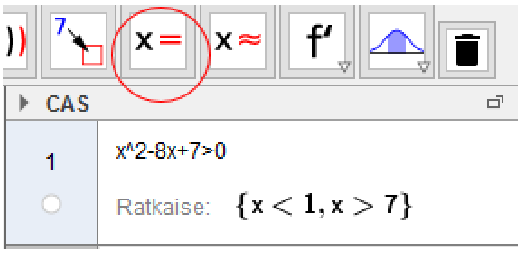
Siis $x\in\left]0,\frac{2}{3}\right[$ eli $0<x<\frac{2}{3}$.

Vastaus:$0<x<\frac{2}{3}$

Sessio 10 Tehtävä 5 (PB)

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 8x + 7 > 0$.

Kirjoitetaan syöttökenttään haluttu epäyhtälö ja valitaan rivi hiiren ykköspainikkeella ja painetaan kuvassa punaisella ympyröityä ratkaise-komentopainiketta.



$x \in \,]-\infty, 1[$ tai $x \in \,]7, \infty[$

Vastaus: $x < 1$ tai $x > 7$

Sessio 10 Tehtävä 6 (PA)

Milloin lauseke $\sqrt{(x^2+1)(4-x^2)}$ on määritelty reaalilukujen joukossa?

Juurilauseke on määritelty, kun se on epänegatiivinen.

$x^2 + 1 \geq 0$ aina, koska minkään reaaliluvun neliö ei voi olla negatiivinen. Tutkitaan siis, milloin juuren alla olevan lausekkeen $(x^2+1)(4-x^2)$ toinen tulon tekijä $4 - x^2$ on epänegatiivinen eli $4 - x^2 \geq 0$.. Muodostetaan apufunktio $f(x) = 4 - x^2$ ja tutkitaan sen nollakohtia yhtälöllä $4 - x^2 = 0$:

$4 - x^2 = 0 \quad \| + x^2$

$x^2 = 4 \quad \| \sqrt{}$

$x = \pm 2$

Koska kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli ($a < 0$), saa funktio f positiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

Nollakohdat		-2		2	
$f(x) = 4 - x^2$	-	-2	+	2	-

$-2 \leq x \leq 2$ eli $x \in [-2, 2]$

Vastaus: $-2 \leq x \leq 2$

Sessio 10 Tehtävä 7 (PA)

Ratkaise epäyhtälö $(3x+1)^2-(3x-1)^2<18x-24$

$$(3x+1)^2-(3x-1)^2<18x-24$$

Avataan binomin neliöt.

$$9x^2+6x+1-\left(9x^2-6x+1\right)<18x-24$$

$$9x^2+6x+1-9x^2+6x-1<18x-24$$

Yhdistetään samanmuotoiset termit:

$$12x<18x-24 \quad \| -18x$$

$$-6x<-24 \quad \| :(-6)$$

$$x>4$$

Vastaus: $x>4$ eli $x\in\,]4,\infty[$

Sessio 10 Tehtävä 8 (PB)

Minkä kahden positiivisen kokonaisluvun summa on 30 ja tulo vähintään 200? Ratkaise taulukkolaskentaohjelman avulla.

Olkoon luvut x, y ja $x+y=30$ eli $y=30-x$. Tehdään taulukko, johon kirjataan $T(x)=x\cdot y$ $=x\cdot(30-x)=30x-x^2$ arvoja sen määrittelyjoukossa $Mf: x\in[0,30]$. Milloin $200\leqslant 40x-x^2$

LibreOffice Calcissa saadaan:

n	x	30-x	Tulo
1	0	30	0
2	1	29	29
3	2	28	56
4	3	27	81
5	4	26	104
6	5	25	125
7	6	24	144
8	7	23	161
9	8	22	176
10	9	21	189
11	10	20	200
12	11	19	209
13	12	18	216
14	13	17	221
15	14	16	224
16	15	15	225
17	16	14	224
18	17	13	221
19	18	12	216
20	19	11	209
21	20	10	200
22	21	9	189
23	22	8	176
24	23	7	161
25	24	6	144
26	25	5	125
27	26	4	104
28	27	3	81
29	28	2	56
30	29	1	29

Siis luvut ovat $(10,20)$, $(11,19)$, $(12,18)$, $(13,17)$, $(14,16)$, $(15,15)$, $(16,14)$, $(17,13)$, $(18,12)$, $(19,11)$ ja $(20,10)$

Sessio 10 Tehtävä 9 (PB)

Määritä parametri a siten, että yhtälöllä $2x^2 + 4ax + a = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja.

Yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja, jos diskriminantti $D < 0$

Nyt $D = (4a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot a = 16a^2 - 8a < 0$

Tutkitaan funktion $f(a) = 16a^2 - 8a$ nollakohtia yhtälöllä $16a^2 - 8a = 0$.

Otetaan $8a$ yhteiseksi tekijäksi:

$8a\,(2a - 1) = 0$.

Tulon nollasäännön nojalla

$$
\begin{array}{llll}
8a = 0 & \| : 8 \quad \text{tai} & 2a - 1 = 0 & \| + 1 \\
a = 0 & \quad\quad\; \text{tai} & 2a = 1 & \| : 2 \\
 & & a = \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

Funktion f kuvaaja on ylöpäin aukeva paraabeli (toisen asteen termin kerroin on positiivinen), joten se saa negatiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

Nollakohta		0		$\frac{1}{2}$	
$f(a) = 16a^2 - 8a$	+	0	-	$\frac{1}{2}$	+

Siis ei reaalisia ratkaisuja, kun $0 < a < \frac{1}{2}$ eli $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

Vastaus: $0 < a < \frac{1}{2}$

Sessio 10 Tehtävä 10 (PB)

Mitkä ovat ne kaksi peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joiden tulo on lukujen 800 ja 1000 välissä?

Olkoon positiiviset kokonaisluvut x ja $x+1$.

Muodostetaan epäyhtälö: $800 \leq x(x+1) \leq 1000$ ja ratkaistaan se CAS-laskimella.

Tämä malliratkaisu on laadittu TI-nspirellä.

$$\text{solve}\left(800 \leq x \cdot (x+1) \leq 1000, x\right)$$
$$\blacktriangleright\ -32.1267 \leq x \leq -28.7887 \text{ or } 27.7887 \leq x \leq 31.1267$$

Koska lukujen piti olla positiivisia kokonaislukuja, hylätään negatiivisia lukuja sisältävä vastaus ja otetaan positiiviselta lukuväliltä huomioon vain kokonaisluvut.

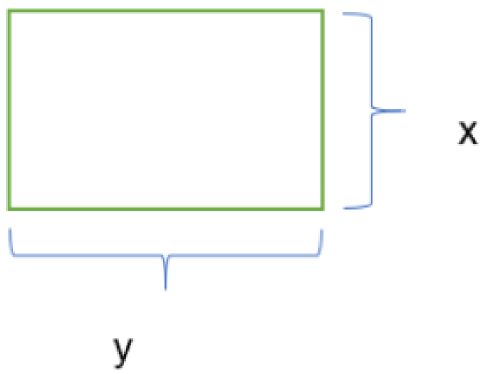
Tältä väliltä saadaan siis lukuparit: $(28,29),(29,30),(30,31)$.

Vastaus: $(28,29),(29,30),(30,31)$

Sessio 10 Tehtävä 11 (PB)

Suorakulmion pinta-ala on 30 m^2 ja piiri enintään 24 m. Mitä arvoja suorakulmion sivujen pituudet voivat saada? (K2002/7)

Muodostetaan mallikuva:



Tehtävänannon perusteella:

$2x + 2y \leq 24$, kun $x \in \,]0,12[$ ja $A = x \cdot y = 30$ eli $y = \dfrac{30}{x}$

Siis tutkitaan milloin $2x + \dfrac{60}{x} \leq 24$. Syötetään epäyhtälö CAS-laskimeen. Tämä malliratkaisu on laadittu TI-nspirellä.

$$\text{solve}\left(2 \cdot x + \frac{60}{x} \leq 24, x\right) \ \blacktriangleright\ -\left(\sqrt{6}-6\right) \leq x \leq \sqrt{6}+6 \text{ or } x<0$$

Vastaus: Sivujen pituus metreinä voi olla $6-\sqrt{6} \leq x \leq 6+\sqrt{6}$ eli noin $3,55 \leq x \leq 8,45$ metriä

Sessio 10 Tehtävä 12 (SA)

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2 \leqslant x$. (K2011/1b)

$x^2 - 2 \leq x \,||\, -x$

$x^2 - x - 2 \leq 0$

Selvitetään funktion $f(x) = x^2 - x - 2$ nollakohdat yhtälöstä $x^2 - x - 2 = 0$.

Sijoitetaan kertoimet $a = 1$, $b = -1$ ja $c = -2$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ tai } x = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Koska funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ($a > 0$), se saa negatiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

		-1		2	
$f(x) = x^2 - x - 2$	+	-1	-	2	+

Vastaus: Epäyhtälö on siis tosi, kun $-1 \leq x \leq 2$ tai $x \in [-1, 2]$

Sessio 10 Tehtävä 13 (SA)

Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^2 + ax + 2a = 0$ on kaksi reaalista ratkaisua?

Nyt $D = a^2 - 8a > 0$.

Tutkitaan, milloin $a^2 - 8a = 0$.

Otetaan a yhteiseksi tekijäksi: $a(a-8) = 0$

Tulon nollasäännön nojalla

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad a - 8 = 0 \quad || +8$$

$$a = 8$$

Funktion $a^2 - 8a$ kuvaajana on ylöspäin aukeava paraabeli. Ylöspäin aukeva paraabeli saa positiivisia arvoja muualla kuin nollakohtiensa välissä tai nolakohdissa. Diskriminantti on siis positiivinen, kun $a < 0$ tai $a > 8$.

Vastaus: $a < 0$ tai $a > 8$

Sessio 10 Tehtävä 14 (SB)

Autoilijan työmatkan kesto riippuu liikennevirrasta m kaavan $t = 0,01m^2 + 0,03m + 18$ mukaisesti, missä t on ajoaika minuutteina ja m liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia? (K1993/3b)

$$0,01m^2 + 0,03m + 18 \leq 30$$

Syötetään epäyhtälö CAS-laskimeen. Tämä malliratkaisu on laadittu TI-nspirellä.

$$\text{solve}\left(0.01 \cdot m^2 + 0.03 \cdot m + 18 \leq 30, m\right) \blacktriangleright -36.1735 \leq m \leq 33.1735$$

Siis epäyhtälön ratkaisu on $-36,17 \leq m \leq 33,17$, mutta koska liikennevirta on positiivinen eli $m \geq 0$, niin vastaukseksi saadaan enintään 33 autoa minuutissa.

Vastaus: Enintään 33 autoa minuutissa

Sessio 10 Tehtävä 15 (SA)

Millä a:n arvoilla yhtälön $x^2 + (3a+1)x + 81 = 0$ juuret ovat reaaliset? (K1988/3)

Tutkitaan yhtälön $x^2 + (3a+1)x + 81 = 0$ diskriminanttia.

Juuret ovat reaaliset, jos $D = (3a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81 = 9a^2 + 6a + 1 - 324 = 9a^2 + 6a - 323 \geq 0$.

Tutkitaan funktion $f(a) = 9a^2 + 6a - 323$ nollakohtia ratkaisemmalla yhtälö $9a^2 + 6a - 323 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-323)}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{11664}}{18} = \frac{-6 \pm 108}{18}$$

$$a = \frac{-6 - 108}{18} = -\frac{114}{18} = -\frac{19}{3} \text{ tai } a = \frac{-6 + 108}{18} = \frac{102}{18} = \frac{17}{3}.$$

Koska funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, niin se saa epänegatiivisia arvoja silloin, kun $a \leq -\frac{19}{3}$ tai $a \geq \frac{17}{3}$

Vastaus: $a \leq -\frac{19}{3}$ tai $a \geq \frac{17}{3}$