Malliratkaisut MAA2, Luku 16

Sessio 16 Tehtävä 4 (PA)

Sievennä $(a-b)^2 - \frac{1}{2}(2a+b)^2$.

Lasketaan potenssi binomin neliön kaavalla:

$$(a-b)^2 - \frac{1}{2}(2a+b)^2 = (a^2-2ab+b^2) - \frac{1}{2}\left(4a^2+4ab+b^2\right)$$

Avataan sulut:

$$(a^2-2ab+b^2) - \frac{1}{2}\left(4a^2+4ab+b^2\right) = a^2-2ab+b^2-2a^2-2ab-\frac{1}{2}b^2$$

Yhdistetään samanmuotoiset termit:

$$a^2-2ab+b^2-2a^2-2ab-\frac{1}{2}b^2 = -a^2-4ab+\frac{1}{2}b^2$$

Vastaus: $-a^2-4ab+\frac{1}{2}b^2$

Sessio 16 Tehtävä 5 (PA)

Jaa tekijöihin $2x^2-10x-28$.

Tutkitaan funktion $p(x)=2x^2-10x-28$ nollakohta yhtälöllä $2x^2-10x-28=0$.

Nyt $a=25$, $b=-10$ ja $c=-28$, sijoitetaan ne toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2-4\cdot 2\cdot(-28)}}{2\cdot 2} = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{10 \pm 18}{4}$$

$$x = \frac{10-18}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \text{ tai } x = \frac{10+18}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

Merkitään $x_1=-2$ ja $x_2=7$ ja x^2:n termin kerroin on 2 ja sijoitetaan polynomifunktion tekijämuotoon $p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Vastaus: Tekijöihin jaettuna: $2x^2-10x-28 = 2\,(x+2)\,(x-7)$

Sessio 16 Tehtävä 6 (PA)

(A) Ratkaise $4x^2 - 12x = 0$.

$4x^2 - 12x = 0$

Otetaan yhteinen tekijä:

$4x\,(x-3) = 0$

Tulon nollasäännön mukaan:

$4x = 0 \quad \| :4 \quad \text{tai} \quad x - 3 = 0 \quad \| +3$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$

Vastaus: $x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$

Sessio 16 Tehtävä 7 (PB)

Osoita, että yhtälön $2x^2 - 5x + 2 = 0$ juuret ovat toistensa käänteislukuja.

Ratkaistaan yhtälö $2x^2 - 5x + 2 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$x = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ ja $x = \dfrac{5+3}{4} = 2$ ja niiden tulo on $\dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Vastaus: Koska juurien tulo on yksi, niiden täytyy olla toisten käänteislukuja.

Sessio 16 Tehtävä 8 (PA)

Määritä a siten, että polynofunktion $p(x) = ax^2 + x - 1$ tekijä on $x + 1$. Mitkä ovat polynomifunktion nollakohdat? Esitä vielä polynomifunktion lauseke tekijämuodossa kokonaislukukertoimisena.

Koska polynomifunktion $p(x) = ax^2 + x - 1$ tekijä on $x + 1$, saadaan polynomifunktion eräs nollakohta määritettyä yhtälöstä

$x + 1 = 0 \quad \| - 1$

$x = -1$.

Merkitään $p(-1) = a - 1 - 1 = a - 2 = 0$, josta $a = 2$.

Siis $p(x) = 2x^2 + x - 1$.

Selvitetään nyt polynomifunktion p kaikki nollakohdat yhtälöllä $2x^2 + x - 1 = 0$. Ratkaistaan yhtälö $2x^2 + x - 1 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{-1 - 3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 .$$

Merkitään $x_1 = \dfrac{1}{2}$ ja $x_2 = -1$ sekä $a = 2$ ja sijoitetaan arvot toisen asteen polynomifunktion tekijämuotoiseen kaavaan $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$:

Nyt siis $2x^2 + x - 1 = 2(x + 1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

Vastaus: $p(x) = 2(x + 1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

Sessio 16 Tehtävä 9 (PA)

Mikä on sen ylöspäin aukeavan kokonaislukukertoimisen paraabelin yhtälö, jonka juuret ovat $x_1 = \frac{1}{2}$ ja $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Koska kyseessä on ylöspäin aukeva paraabeli, täytyy luvun a olla positiivinen.

Nollakohtien perusteella tiedetään, että paraabelin yhtälö on muotoa

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{-1}{3}\right)\right) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) =$$
$$a\left(x\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)\right) = a\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = a\left(x^2 + \frac{2}{6}x - \frac{3}{6}x - \frac{1}{6}\right) =$$
$$a\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right)$$

Kun valitaan $a = 6$ (tai jokin sen moninkerta), niin saadaan kokonaislukukertoiminen toisen asteen yhtälö:

$$y = 6x^2 - x - 1$$

Vastaus: Paraabelin yhtälö on siis esimerkiksi $y = 6x^2 - x - 1$

Sessio 16 Tehtävä 10 (PB)

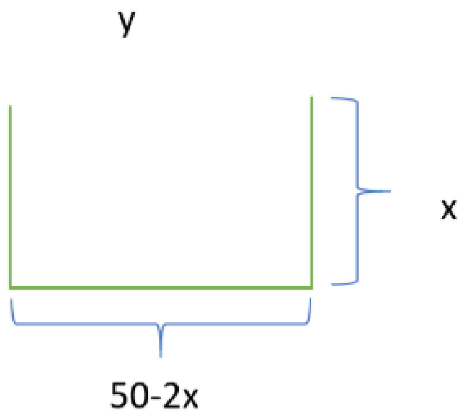
Milla päätti rajata joenrantatonttinsa suorakaiteen muotoisen piha-alueen aitauksella. Yhtenä suorakaiteen sivuna oli joen penkka, joten tämä sivu ei tarvitse aitausta. Loppuihin kolmeen sivuun hänellä oli käytettävissään yhteensä 50 metriä aitaa. Miten aitauksen mitat pitäisi valita, jos aitauksen tulee olla pinta-alaltaan välillä 272 m^2 -300 m^2?

Merkitään aitauksen yhden sivun pituutta x ja toisen y. Koska aitausta oli käytettävissä 50 m ja aitaus on suorakaiteen muotoinen, saadaan sen piiristä muodostettua yhtälö

$2x + y = 50 \quad \| -2x$

$y = 50 - 2x$

Tehdään mallikuva:



Koska sekä $x > 0$ että $y > 0$, täytyy

$50 - 2x > 0 \quad \| -50$

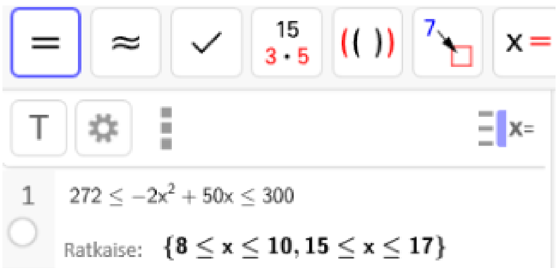
$-2x > -50 \quad \| : (-2)$

$x < 25$

Nyt $A(x) = x \cdot y \; = x \cdot (50 - 2x) \; = 50x - 2x^2$ ja sen $Mf : x \in \,]0, 25[$.

Tehtävänannon mukaisesti tutkitaan kaksoisepäyhtälöä $272 \leq -2x^2 + 50x \leq 300$.

GeoGebralla:



Joen penkkaa kohtisuorassa oleva aitauksen sivu on siis metreissä $8 \leq x \leq 10$. Tällöin joen penkan kanssa yhdensuuntainen sivu y on metreissä välillä

$y = 50 - 2 \cdot 8 = 50 - 16 = 34$ ja

$y = 50 - 2 \cdot 10 = 50 - 20 = 30$ eli $30 \leq y \leq 34$.

Vaihtoehtoisesti joen penkkaa kohtisuorassa oleva aitauksen sivu on metreissä $15 \leq x \leq 17$.

Tällöin joen penkan kanssa yhdensuuntainen sivu y on metreissä välillä

$y = 50 - 2 \cdot 15 = 50 - 30 = 20$ ja

$y = 50 - 2 \cdot 17 = 50 - 34 = 16$ eli $16 \leq y \leq 20$.

Vastaus: $8 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$ ja $30 \text{ m} \leq y \leq 34 \text{ m}$ tai $15 \text{ m} \leq x \leq 17 \text{ m}$ ja $16 \text{ m} \leq y \leq 20 \text{ m}$

LibreOfficella:

B	C	D	E
	x	50-2x	Ala
1	1	48	48
2	2	46	92
3	3	44	132
4	4	42	168
5	5	40	200
6	6	38	228
7	7	36	252
8	8	34	272
9	9	32	288
10	10	30	300
11	11	28	308
12	12	26	312
13	13	24	312
14	14	22	308
15	15	20	300
16	16	18	288
17	17	16	272
18	18	14	252
19	19	12	228
20	20	10	200
21	21	8	168
22	22	6	132
23	23	4	92
24	24	2	48
25	25	0	0

Sivun x mitta kuuluu metreissä välille $8 \leq x \leq 10$ jolloin sivun y mitta on metreissä $30 \leq y \leq 34$

tai metreissä $15 \leq x \leq 17$ ja sivun y mitta on metreissä $16 \leq y \leq 20$.

Vastaus: $8 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$ ja $30 \text{ m} \leq y \leq 34 \text{ m}$ tai $15 \text{ m} \leq x \leq 17 \text{ m}$ ja $16 \text{ m} \leq y \leq 20 \text{ m}$

Sessio 16 Tehtävä 11 (PA)

Missä pisteessä paraabelit $f(x) = x^2 + x + 1$ ja $g(x) = x^2 + 2x + 3$ leikkaavat? (S2014/1b)

Merkitään paraabelien lausekkeet yhtä suuriksi:

$x^2 + x + 1 = x^2 + 2x + 3 \quad \| - x^2$

$x + 1 = 2x + 3 \quad \| - x$

$1 = x + 3 \quad \| - 3$

$x = -2$

Sijoitetaan saatu arvo $x = -2$ funktioon f:

$f(-2) = (-2)^2 - 2 + 1 = 3$, joten paraabelit leikkaavat kohdassa $(-2, 3)$.

Vastaus: $(-2, 3)$

Sessio 16 Tehtävä 12 (PA)

Sievennä $\frac{x^2-4x+3}{3}+\frac{x-25}{2}$

a)

$$\frac{x^2-4x+3}{3}+\frac{x-25}{2}$$

$$=\frac{2\left(x^2-4x+3\right)}{6}+\frac{3\,(x-25)}{6}=$$

$$\frac{2x^2-8x+6+3x-75}{6}=$$

$$\frac{2x^2-5x-69}{6}$$

Vastaus: $\frac{2x^2-5x-69}{6}$

b) $(2x + 1)(4x^2-1) =$

$8x^3 – 2x + 4x^2 – 1 =$

$8x^3 +4x^2 -2x – 1$

Vastaus: $8x^3 +4x^2 -2x – 1$

Sessio 16 Tehtävä 13 (SA)

Ratkaise epäyhtälö muuttujan x suhteen

$a^2x < (2a - 5)x +1$

$$a^2x-(2a-5)x<1$$

$$\left(a^2-2a+5\right)x<1$$

Koska lauseke

$a^2 – 2a + 5$ on 2. asteen polynomi, sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja lisäksi lausekkees diskriinatti < 0 , niin

$$x<\frac{1}{a^2-2a+5}$$

Vastaus: $x<\frac{1}{a^2-2a+5}$

Sessio 16 Tehtävä 14 (SA)

Ratkaise muuttuajn x suhteen epäyhtälö

$-(b + 1)^2x > 1 + 3x$

$$-(b+1)^2x-3x>1$$

$$\left(-b^2-2b-1-3\right)x>1$$

$$\left(-b^2-2b-4\right)x>1$$

Koska lausekkeen

$- b^2 – 2b – 4$

kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli

ja lausekkeen diskriminantti < 0, on

$- b^2 – 2b – 4 < 0$

kaikilla vakion b arvoilla , saamme

$$x\ <\frac{1}{-b^2-2b-4}$$

Vastaus: $x < \dfrac{1}{-b^2 - 2b - 4}$

Sessio 16 Tehtävä 15 (SB)

Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä

$-x^3+ax^2+(4-2a)x = 0$

eri vakion a arvoilla?

$$-x^3 + ax^2 + (4-2a)x = 0$$

$$x\left(-x^2 + ax + 4 - 2a\right) = 0$$

$$x = 0 \; tai \; -x^2 + ax + 4 - 2a = 0$$

$$x = 0 \; tai \; x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(-1)(4-2a)}}{-2}$$

$$a^2 + 4(4-2a) = a^2 - 8a + 16 = (a-4)^2$$

Diskriminantti = 0 , jos a = 4, muulloin diskriminantti > 0.
Siksi oikean puoleisella yhtälöllä on yksi ratkaisu, jos a = 4 ja kaksi ratkaisua muilla a:n arvoilla.

Vastaus: yhtälöllä on kaksi ratkaisua, jos a = 4 ja kolme ratkaisua kaikilla muilla a:n arvoilla.